Gheorghe PROCOPIUC

PROBLEME DE ALGEBRĂ LINIARĂ ŞI GEOMETRIE

IAŞI, 2005

CUPRINS

CAPITOLUL 1

MATRICE ŞI SISTEME ALGEBRICE LINIARE

1.1 Matrice şi determinanţi

1.1.1 Să se calculeze produsele AB şi BA dacă:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

2) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

3) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

4) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ -5 & -2 & 2 \\ -13 & -7 & 4 \end{bmatrix}$.

R: 1) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 7 & -17 & 9 \end{bmatrix}$.

2) $AB = \begin{bmatrix} 14 & -5 & 22 & 6 \\ 7 & 10 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, BA nu este posibil.

3) $AB = \begin{bmatrix} 7 & 22 & -27 \\ 5 & 10 & -15 \\ 21 & 14 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -16 & -20 & -80 \\ 8 & 7 & 21 \\ 16 & 17 & 26 \end{bmatrix}$.

4) $AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1.1.2 Se dă polinomul $f(X) = X^2 - 7X + 11I_2$. Să se calculeze $f(A)$ dacă

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

R: $f(A) = \begin{bmatrix} 17 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

1.1.3 Să se găsească cea mai generală matrice pătratică de ordinul trei care comută cu matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

R: $AX = XA$, pentru $X = \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & u \\ z & y & x \end{bmatrix}$, cu $x, y, z, u, v \in \mathbf{R}$.

1.1.4 O matrice pătratică se numeşte matrice *diagonală* dacă toate elementele sale, cu excepţia posibilă a elementelor diagonalei principale sunt egale cu zero. Fie $D \in \mathcal{M}_n(K)$ o matrice diagonală cu toate elementele diagonalei distincte. Să se arate că matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este o matrice diagonală d.d. comută cu D, adică $AD = DA$.

R: Fie $D = [\lambda_i \delta_{ij}]$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_k$, pentru $i \neq k$, $i, k = \overline{1, n}$. Dacă A este o matrice diagonală,

$$A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = [a_i \delta_{ij}],$$

atunci $AD = [a_i \lambda_i \delta_{ij}] = [\lambda_i a_i \delta_{ij}] = DA$.

Reciproc, fie $A = [a_{ij}]$. Avem

$$AD = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j \delta_{jk} \right] = [a_{ik} \lambda_k], \quad DA = \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} a_{jk} \right] = [\lambda_i a_{ik}].$$

Din $AD = DA$, rezultă $a_{ik} \lambda_k = \lambda_i a_{ik}$, sau $(\lambda_i - \lambda_k) a_{ik} = 0$, de unde $a_{ik} = 0$ pentru $i \neq k$, $i, k = \overline{1, n}$ şi deci A este o matrice diagonală.

1.1.5 Fie $D = [\lambda_i \delta_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$ o matrice diagonală şi $P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$ un polinom cu coeficienţi din K. Să se arate că $P(D) = [P(\lambda_i) \delta_{ij}]$.

R: Se constată imediat că $D^k = \left[\lambda_i^k \delta_{ij}\right]$, $k = \overline{1, m}$. Deci

$$P(D) = \sum_{k=0}^{m} a_k D^k = \left[\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_i^k \delta_{ij} \right] = [P(\lambda_i) \delta_{ij}].$$

1.1.6 O matrice pătratică de ordinul m se numeşte *matrice elementară* dacă se obţine din matricea unitate aplicând o transformare elementară unei linii. O matrice elementară are una din următoarele forme, corespunzătoare celor trei tipuri de transformări elementare:

$$M_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

obţinută din matricea unitate I_m prin înmulţirea liniei i cu scalarul nenul α,

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

obţinută din matricea unitate I_m prin schimbarea liniei i cu linia j,

$$A_{ij}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

obţinută din matricea unitate I_m prin adăugarea la linia j a liniei i înmulţită cu scalarul α.

Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Să se arate că:

1) Inmulţirea liniei i a matricei A cu scalarul nenul α se obţine efectuând produsul $M_i(\alpha)\cdot A$.

2) Schimbarea liniei i cu linia j, în matricea A, se obţine efectuând produsul $S_{ij}\cdot A$.

3) Adăugarea la linia j a liniei i înmulţită cu scalarul α, în matricea A, se obţine efectuând produsul $A_{ij}(\alpha)\cdot A$.

4) Matricele elementare sunt inversabile şi:

$$M_i^{-1}(\alpha) = M_i\left(\alpha^{-1}\right),\ \ S_{ij}^{-1} = S_{ij},\ \ A_{ij}^{-1}(\alpha) = A_{ij}(-\alpha).$$

1.1.7 Să se calculeze determinanţii:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.\ 2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.\ 3) \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}.$$

R: 1) 1. 2) 2. 3) $2a^2(x+a)$.

1.1.8 Fie matricea $A = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$. Calculând $A \cdot {}^tA$, să se arate că

$$\det \begin{bmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{bmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

R: $D(A) = -2abc$.

1.1.9 Să se dezvolte după coloana a doua, determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ 3 & b & 0 & 2 \\ -1 & c & 3 & -2 \\ 2 & d & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

R: $-3a+4b-11c-10d$.

1.1.10 Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

R: x^2y^2.

1.1.11 Să se calculeze determinanţii:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}, \textit{ (generalizare).} \quad 2) \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}.$$

R: 1) $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$.
2) $(x-a-b-c)(x-a+b+c)(x+a-b+c)(x+a+b-c)$.

1.1.12 Fie $D(A) = \det[a_{ij}]$ şi $D(C) = \det[C_{ij}]$, unde C_{ij} este complementul algebric al lui a_{ij}. Se cere:

1) Să se calculeze $D(A) \cdot D(C)$.

2) Dacă $D(A) \neq 0$, să se arate că $D(A^*) = [D(A)]^{n-1}$, unde A^* este matricea adjunctă a matricei A.

R: Se va observa că ${}^tC = A^*$ şi deci

$$A \cdot {}^tC = A \cdot A^* = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{kj}\right] = [D(A)\delta_{ij}],$$

adică $A \cdot {}^tC = D(A)I_n$, de unde $D(A)D(C) = [D(A)]^n$.

1.1.13 Să se precizeze care dintre următoarele matrice este nesingulară:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

R: $D(A) = 21$, $D(B) = 0$, $D(C) = 0$.

1.1.14 Să se determine inversele matricelor:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}.$$

R: $A^{-1} = \dfrac{1}{72} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 18 & -6 & 18 \\ 6 & 14 & -18 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = -\dfrac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -9 & -3 & 3 \end{bmatrix}$,
$C^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

1.1.15 Să se determine valorile lui α pentru care matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

este neinversabilă. Pentru toate celelalte valori ale lui α să se determine inversa.

R: $D(A) = 1 - \alpha^2$, deci $\alpha = \pm 1$, $A^{-1} = \dfrac{1}{1-\alpha^2} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & 1 \\ -\alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix}$, pentru $\alpha \neq \pm 1$.

1.1.16 Să se găsească condiţia ca matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -n & m \\ n & 1 & -\ell \\ -m & \ell & 1 \end{bmatrix}$$

să fie nesingulară şi în acest caz să se calculeze inversa sa.

R: Determinantul $D(A) = 1 + \ell^2 + m^2 + n^2$. Inversa este

$$A^{-1} = \frac{1}{1 + \ell^2 + n^2 + m^2} \begin{bmatrix} 1 + \ell^2 & n + m\ell & -m + n\ell \\ -n + m\ell & 1 + m^2 & \ell + nm \\ n\ell + m & -\ell + nm & 1 + n^2 \end{bmatrix}.$$

1.1.17 *Să se arate că oricare ar fi matricele nesingulare $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ avem:*

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right), \ \left(A^{-1}\right)^{-1} = A,$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, \ k \neq 0, \ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.1.18 Să se arate că inversa unei matrice nesingulare superior (inferior) triunghiulară este o matrice superior (inferior) triunghiulară. Să se calculeze inversa matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

R: Dacă A este o matrice superior triunghiulară, transpusa sa este o matrice inferior triunghiulară şi toţi minorii elementelor de sub diagonala principală sunt nuli, deci A^* va fi o matrice superior triunghiulară.

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 24 & -12 & -12 & 3 \\ 0 & 12 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

1.1.19 Utilizând regula lui Laplace, să se arate că

$$\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} = 4\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

1.1.20 Fie $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$ şi $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$. Să se arate că dacă $b_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}$, atunci $D(B) = D(A)$.

R: $D(B) = (-1)^s D(A)$, unde $s = (1+2+\cdots+n) + (i_1+i_2+\cdots+i_n)$. Dar $s = n(n+1)$ este număr par.

1.1.21 Fie $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, cu $a_i \in K$, şi $A_i = S - a_i$, $i = \overline{1,n}$. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} x-A_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x-A_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x-A_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x-A_n \end{vmatrix} = x(x-S)^{n-1}.$$

R: Se adună toate coloanele la prima şi se scoate x factor. Se fac apoi zerouri pe prima coloană.

1.1.22 Se dă determinantul de ordinul n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Să se arate că $\Delta_n - \Delta_{n-1} = x^2(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2})$ şi să se calculeze Δ_n.

R: Se dezvoltă după prima linie sau coloană. Se obţine $\Delta_n = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$.

1.1.23 Să se calculeze rangul matricelor:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.\quad 2)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$3)\ A = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}.\quad 4)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & -10 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

R: 1) $r = 2$. 2) $r = 2$. 3) $r = 2$. 4) $r = 3$

1.1.24 Să se discute după parametrul $\alpha \in \mathbf{R}$ valorile posibile ale rangului matricelor:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6+\alpha \\ 2 & 3 & 4-\alpha & 2 \\ 1 & 1-\alpha & -2 & -5 \\ 1 & 6 & 12 & 19 \end{bmatrix}.\ 2)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

R: 1) $D(A) = 14 - 27\alpha + 12\alpha^2 + \alpha^3 = (\alpha + 14)(\alpha - 1)^2$. Discuţie:
$(i)\ \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-14, 1\},\ r = 4$, $(ii)\ \alpha = -14,\ r = 3$, $(iii)\ \alpha = 1,\ r = 2$.
2) $D(B) = 12\alpha - 18 - 2\alpha^2 = -2(\alpha - 3)^2$. Discuţie:
$(i)\ \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{3\},\ r = 4$, $(ii)\ \alpha = 3,\ r = 2$.

1.1.25 Fie $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Să se arate că $\operatorname{rg} A = 1$ d.d. există matricele nenule

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(K),\ Y = [y_1, y_2, \dots, y_n] \in \mathcal{M}_{1\times n}(K)$$

a.î.

$$A = XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_my_1 & x_my_2 & \dots & x_my_n \end{bmatrix}.$$

R: Dacă $A = XY$ atunci orice minor de ordinul 2 al matricei A este nul şi există măcar un $x_i y_j$ nenul. Deci $\operatorname{rg} A = 1$. Reciproc, dacă $\operatorname{rg} A = 1$ orice două coloane ale matricei A sunt proporţionale. Fie $x_i = a_{i1}$, $i = \overline{1,m}$. Coloanele 2, …, n fiind proporţionale cu prima coloană, există $y_j \in K$, $j = \overline{2,n}$, a.î. $a_{ij} = x_i y_j$, $i = \overline{1,m}$, pentru $j = \overline{1,n}$, cu $y_1 = 1$.

1.2 Sisteme de ecuaţii algebrice liniare

1.2.1 Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele liniare:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 7. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$$

R: 1) $[A|B] = \left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & | & 4 \\ -2 & -1 & 2 & -2 & | & -3 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & | & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right].$

Sistem compatibil simplu nedeterminat. Soluţia: $x_1 = 5 - 3\lambda$, $x_2 = -5 + 2\lambda$, $x_3 = 1 - \lambda$, $x_4 = \lambda$, cu $\lambda \in \mathbf{R}$.

2) $[A|B] = \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -3 & | & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & -4 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{array}\right].$

Sistem incompatibil.

3) $[A|B] = \left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 2 & 3 & -2 & | & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & | & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & | & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & | & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 2 & 3 & -2 & | & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{array}\right].$

Sistem compatibil determinat. Soluţia: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$.

4) $[A|B] = \left[\begin{array}{rrrrcr} 0 & 1 & -3 & 4 & | & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & | & -4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & | & 12 \\ 4 & 3 & -5 & 0 & | & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 0 & -2 & 3 & | & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & | & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -11 & | & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{array}\right].$

Sistem compatibil determinat. Soluţia: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

1.2.2 Să se rezolve prin metoda lui Gauss-Jordan sistemele liniare:

$$1)\ \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 13, \\ 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 18, \\ 3x_1 - 13x_2 + 19x_3 = 22. \end{cases}$$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

R: 1) $[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Sistem compatibil dublu nedeterminat. Soluţia: $x_1 = -5 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2$, $x_2 = -1 + \lambda_1 + \lambda_2$, $x_3 = \lambda_1$, $x_4 = \lambda_2$, cu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$.

2) $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & -11 & 13 \\ 4 & -5 & 4 & 18 \\ 3 & -13 & 19 & 22 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -15 & -5 \\ 0 & -37 & 64 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$.

Sistem incompatibil.

3) $[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Sistem compatibil triplu nedeterminat. Soluţia: $x_1 = -16 + \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3$, $x_2 = 23 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 6\lambda_3$, $x_3 = \lambda_1$, $x_4 = \lambda_2$, $x_5 = \lambda_3$, cu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$.

4) $[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Sistem compatibil simplu nedeterminat. Soluţia: $x_1 = \frac{1}{6} + 5\lambda$, $x_2 = \frac{1}{6} - \frac{7}{6}\lambda$, $x_3 = \frac{1}{6} + 5\lambda$, $x_4 = 6\lambda$, cu $\lambda \in \mathbf{R}$.

Metoda lui Gauss-Jordan poate fi utilizată şi pentru aflarea inversei unei matrice. Dacă A, X şi B sunt matrice pătratice şi A inversabilă, atunci din $AX = B$ urmează $X = A^{-1}B$. In particular, pentru $B = I_n$, rezultă $X = A^{-1}$.

1.2.3 Să se găsească inversa matricei: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$.

R: Matricea

$$[A|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

este echivalentă cu matricea:

$$[I_4|A^{-1}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right],$$

deci:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrrr} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

1.2.4 Să se rezolve, cu formulele lui Cramer, sistemele liniare:

$$1)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

R: 1) $\det A = -4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$. 2) $\det A = -12$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$.

1.2.5 Să se rezolve sistemele liniare. Discuţie.

$$1)\ \begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$$

R: 1) $D(A) = (\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)$. Discuţie:
(i) Pentru $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$, sistem compatibil determinat.
Soluţia: $x_1 = \dfrac{1}{\alpha + 2}$, $x_2 = \dfrac{1}{\alpha + 2}$, $x_3 = \dfrac{1}{\alpha + 2}$.
(ii) Pentru $\alpha = 1$, sistem compatibil dublu nedeterminat.
Soluţia: $x_1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$, $x_2 = \lambda_1$, $x_3 = \lambda_2$.
(iii) Pentru $\alpha = -2$, sistem incompatibil.

$$2)\ [A|B] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(i) Pentru $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, sistem incompatibil.
(ii) Pentru $\lambda = 0$, sistem compatibil dublu nedeterminat.
Soluţia: $x_1 = -\dfrac{5}{2}\lambda_1 - \dfrac{13}{2}\lambda_2 - \dfrac{3}{2}$, $x_2 = -\dfrac{7}{2}\lambda_1 - \dfrac{19}{2}\lambda_2 - \dfrac{7}{2}$, $x_3 = \lambda_1$, $x_4 = \lambda_2$.

1.2.6 Să se rezolve sistemele omogene:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

R: 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sistemul admite numai soluţia banală.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Sistem compatibil dublu nedeterminat. Soluţia: $x_1 = -5\lambda_1$, $x_2 = \lambda_1$, $x_3 = \lambda_2$, $x_4 = -3\lambda_1 + \lambda_2$, cu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$.

1.2.7 Să se rezolve sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ (b+c)\,x_1 + (c+a)\,x_2 + (a+b)\,x_3 = 0, \end{cases} \qquad \textit{cu } a \neq b.$$

R: Sistem compatibil simplu nedeterminat. Soluţia: $x_1 = \lambda\,(b-c)$, $x_2 = \lambda\,(c-a)$, $x_3 = \lambda\,(a-b)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

1.2.8 Să se determine λ a.î. sistemul următor să admită şi soluţii nebanale:

$$\begin{cases} (a-\lambda)\,x_1 + bx_2 + bx_3 + cx_4 = 0, \\ bx_1 + (a-\lambda)\,x_2 + cx_3 + bx_4 = 0, \\ bx_1 + cx_2 + (a-\lambda)\,x_3 + bx_4 = 0, \\ cx_1 + bx_2 + bx_3 + (a-\lambda)\,x_4 = 0. \end{cases}$$

R: Sistemul admite şi soluţii nebanale dacă:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & b & c \\ b & a-\lambda & c & b \\ b & c & a-\lambda & b \\ c & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

adică pentru: $\lambda \in \{a-c, a+2b+c, a-2b+c\}$.

1.2.9 Să se rezolve sistemele omogene. Discuţie.

$$1)\ \begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ (1-\lambda)x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - \lambda x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + (2-\lambda)x_4 = 0. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

R: 1) $D(A) = (\lambda - 1)^4$. Discuţie:
(i) Pentru $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, sistemul admite numai soluţia banală.
(ii) Pentru $\lambda = 1$ aplicăm metoda lui Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem compatibil dublu nedeterminat. Soluţia: $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = 2\lambda_1 + \lambda_2$, $x_3 = \lambda_2$, $x_4 = 2\lambda_2$, cu λ_1, $\lambda_2 \in \mathbf{R}$.

2) $D(A) = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$. Discuţie:

(i) Pentru $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$, sistemul admite numai soluţia banală.

(ii) Pentru $\lambda = 2$ aplicăm metoda lui Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem compatibil simplu nedeterminat. Soluţia: $x_1 = \lambda$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

(iii) Pentru $\lambda = -1$, sistem compatibil dublu nedeterminat.

Soluţia: $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, $x_3 = -\lambda_1 - \lambda_2$, cu λ_1, $\lambda_2 \in \mathbf{R}$.

1.2.10 Să se determine parametrul $m \in \mathbf{R}$ astfel ca următorul sistem să admită şi soluţii diferite de soluţia banală şi, în acest caz, să se rezolve

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ mx_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

R: Sistemul admite şi soluţii nebanale d.d. $D(A) = 4 - 4m = 0$, deci d.d. $m = 1$. Aplicăm metoda lui Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem compatibil simplu nedeterminat. Soluţia: $x_1 = 2\lambda$, $x_2 = -3\lambda$, $x_3 = 5\lambda$, $x_4 = 4\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

CAPITOLUL 2

SPAŢII VECTORIALE

2.1 Definiţia spaţiului vectorial

2.1.1 Să se arate că orice corp comutativ K poate fi considerat ca spaţiu vectorial peste el însuşi, faţă de operaţiile ce definesc structura sa de corp.

R: Se verifică axiomele din definiţia spaţiului vectorial.

2.1.2 Pe mulţimea $K^n = K \times K \times \ldots \times K = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in K,\ i = \overline{1,n}\}$ definim:
- adunarea prin: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in K^n$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^n$,
- înmulţirea cu scalari prin: $a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) \in K^n$, $\forall\, a \in K$, $\forall \mathbf{x} \in K^n$.

Să se arate că mulţimea K^n este spaţiu vectorial.

2.1.3 Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K şi

$$V^n = V \times V \times \ldots \times V = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n), \mathbf{u}_i \in V,\ i = \overline{1,n}\}.$$

Pe V^n definim operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari din K, astfel:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V^n, \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n) \in V^n,$$

$$\forall a \in K, \forall \mathbf{u} \in V^n, \quad a\mathbf{u} = (a\mathbf{u}_1, a\mathbf{u}_2, \ldots, a\mathbf{u}_n) \in V^n.$$

Să se arate că mulţimea V^n formează un spaţiu vectorial.

2.1.4 Fie $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ mulţimea matricelor dreptunghiulare cu m linii şi n coloane, cu elemente din corpul K. Dacă $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, definim suma prin:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(K),$$

iar pentru $\lambda \in K$, definim produsul cu scalarul λ, prin

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(K).$$

Să se arate că mulţimea $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ formează un spaţiu vectorial.

2.1.5 Notăm cu $C[a,b]$ mulţimea funcţiilor continue pe $[a,b]$ cu valori reale. Definim cele două operaţii prin:

$$\forall f,g \in C[a,b],\ \ (f+g)(x) = f(x)+g(x),\ \forall\, x \in [a,b],$$

$$\forall a \in \mathbf{R},,\ \forall f \in C[a,b],\ \ (af)(x) = a\cdot f(x),\ \forall\, x \in [a,b].$$

Să se arate că mulţimea $C[a,b]$ formează un spaţiu vectorial.

2.1.6 Să se arate că mulţimea $K_n[x]$ a polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi din K formează un spaţiu vectorial.

2.1.7 Fie A o mulţime oarecare nevidă şi V un spaţiu vectorial. Notăm cu $V^A = \{f \,|\, f: A \to V\}$ mulţimea funcţiilor definite pe A cu valori în V. Definim cele două operaţii prin:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ \ \forall\, x \in A,\ \ \forall\, f,g \in V^A,$$

$$\forall\, a \in K,\ (af)(x) = a\cdot f(x),\ \ \forall\, x \in A,\ \ \forall\, f \in V^A.$$

Să se arate că mulţimea V^A formează un spaţiu vectorial.

2.1.8 Fie V un spaţiu vectorial real. Definim pe $V^2 = V \times V$ o structură complexă astfel:

- adunarea: $(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1)+(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)$, $\forall(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1)$, $(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2) \in V^2$,
- înmulţirea cu scalari: $(a+ib)(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (a\mathbf{u}-b\mathbf{v}, a\mathbf{v}+b\mathbf{u})$, $\forall a+ib \in C$, $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in V^2$.

Să se arate că V^2 formează un spaţiu vectorial, numit complexificatul lui V.

2.1.9 Fie V şi W două spaţii vectoriale peste acelaşi corp K. Să se arate că

$$V \times W = \{\mathbf{u} = (\mathbf{x},\mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x} \in V,\ \mathbf{y} \in W\}$$

este spaţiu vectorial peste K în raport cu operaţiile

$$\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2 = (\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2),\ \ \alpha\mathbf{u} = (\alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}),$$

oricare ar fi $\mathbf{u}_1 = (\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1), \mathbf{u}_2 = (\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2), \mathbf{u} = (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V \times W$ şi $\alpha \in K$.

2.1.10 Pe mulţimea $\mathbf{R}_+^* = \{x \in \mathbf{R}, x > 0\}$ definim operaţia de adunare prin: $x \oplus y = xy$, $\forall x,y \in \mathbf{R}_+^*$ şi operaţia de înmulţirea cu scalari prin: $\alpha \odot x = x^\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ şi $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$. Să se arate că $\mathbf{R}_+^*$ este un spaţiu vectorial real.

2.2 Subspaţii vectoriale. Intersecţii şi sume de subspaţii

2.2.1 Fie $S \subset K^n$, definită prin $S = \{\mathbf{x} = (0, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in K,\ i = \overline{2,n}\}$. Să se arate că mulţimea S formează un subspaţiu vectorial al lui K^n.

R: Pentru orice $a,b \in K$ şi orice $\mathbf{x},\mathbf{y} \in S$, avem

$$a\mathbf{x}+b\mathbf{y} = a(0,x_2,\ldots,x_n)+b(0,y_2,\ldots,y_n) = (0, ax_2+by_2,\ldots,ax_n+by_n),$$

deci $a\mathbf{x}+b\mathbf{y} \in S$ şi ca atare S este subspaţiu vectorial al lui K^n.

2.2.2 Fie $S \subset K^n$, mulţimea soluţiilor unui sistem algebric liniar omogen de m ecuaţii liniare cu n necunoscute:

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0,\ i = \overline{1,m}\},$$

cu $a_{ij} \in K$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Să se arate că mulţimea S formează un subspaţiu vectorial al lui K^n.

R: Mulţimea S este nevidă, căci orice sistem liniar omogen admite cel puţin soluţia banală. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in S$. Atunci

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Oricare ar fi $a, b \in K$, avem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(a x_j + b y_j) = a \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0,$$

deci $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in S$ şi ca atare S este subspaţiu vectorial al lui K^n.

2.2.3 Fie $\mathcal{M}_n^s(K) \subset \mathcal{M}_n(K)$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n, simetrice, adică

$$\mathcal{M}_n^s(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K),\ {}^tA = A\}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathcal{M}_n^s(K)$ formează un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_n(K)$.

R: Evident $\mathcal{M}_n^s(K) \neq \emptyset$, deoarece $0 \in \mathcal{M}_n^s(K)$. Folosind proprietăţile operaţiei de transpunere, pentru orice $a, b \in K$ şi orice $A, B \in \mathcal{M}_n^s(K)$, avem

$${}^t(aA + bB) = {}^t(aA) + {}^t(bB) = a\, {}^tA + b\, {}^tB = aA + bB.$$

Rezultă că $\mathcal{M}_n^s(K)$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_n(K)$.

2.2.4 *Fie $\mathcal{M}_n^{as}(K) \subset \mathcal{M}_n(K)$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n, antisimetrice, adică*

$$\mathcal{M}_n^a(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K),\ {}^tA = -A\}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathcal{M}_n^a(K)$ formează un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_n(K)$.

R: Se procedează ca în exerciţiul precedent.

2.2.5 Fie $\mathcal{M}_n^d(K) \subset \mathcal{M}_n(K)$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n, diagonale, adică

$$\mathcal{M}_n^d(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K),\ A = [a_i \delta_{ij}],\ a_i \in K\}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathcal{M}_n^d(K)$ formează un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_n(K)$.

R: Pentru orice $a, b \in K$ şi orice $A, B \in \mathcal{M}_n^d(K)$, avem

$$aA + bB = [aa_i\delta_{ij}] + [bb_i\delta_{ij}] = [(aa_i + bb_i)\delta_{ij}] \in \mathcal{M}_n^d(K),$$

deci $\mathcal{M}_n^d(K)$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_n(K)$.

2.2.6 Să se arate că mulţimea $S = \{f \in C[a,b],\ f(a) = f(b)\}$, unde $C[a,b]$ este spaţiul vectorial real al funcţiilor reale continue pe $[a,b]$, formează un subspaţiu vectorial al lui $C[a,b]$.

R: Mulţimea S este nevidă, căci, de exemplu, orice funcţie constantă aparţine lui S. Oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi pentru orice $f, g \in S$ avem

$$(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha f(a) + \beta g(a) = \alpha f(b) + \beta g(b) = (\alpha f + \beta g)(b),$$

adică $(\alpha f + \beta g) \in S$. Deci S este subspaţiu vectorial al lui $C[a,b]$.

2.2.7 Fie $C^2(\mathbf{R})$ mulţimea funcţiilor reale de două ori derivabile pe $\mathbf{R}$, cu derivată de ordinul doi continuă pe $\mathbf{R}$. Să se arate că:

1) Mulţimea $C^2(\mathbf{R})$ este spaţiu vectorial în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari a funcţiilor.

2) Submulţimea $S = \{f \in C^2(\mathbf{R}) \mid af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0\}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, cu $a, b, c \in \mathbf{R}$, numere fixate, este subspaţiu vectorial al lui $C^2(\mathbf{R})$.

3) Submulţimea $S_0 = \{f \in S \mid f(0) = 0\}$ este subspaţiu vectorial al lui S.

2.2.8 Să se determine subspaţiile $S_1 \cap S_2$ şi $S_1 + S_2$ din $\mathbf{R}^2$ unde

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\},\ \ S_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = -y\}.$$

R: $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$, $S_1 + S_2 = \mathbf{R}^2$, adică suma este directă.

2.2.9 In $\mathbf{R}^2$ se consideră subspaţiile vectoriale:

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - 2y = 0\},\quad S_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x - y = 0\}.$$

Să se arate că $\mathbf{R}^2 = S_1 \oplus S_2$.

R: Sistemul: $x_1 + x_2 = x$, $y_1 + y_2 = y$, $3x_1 - 2y_1 = 0$, $2x_2 - y_2 = 0$ are soluţie unică: $x_1 = 4x - 2y$, $x_2 = -3x + 2y$, $y_1 = 6x - 3y$, $y_2 = -6x + 4y$.

2.2.10 Să se determine subspaţiile $S_1 \cap S_2$ şi $S_1 + S_2$ din $\mathbf{R}^3$ unde

$$S_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\},\ S_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 - 2x_3 = 0\}.$$

R: $S_1 \cap S_2 = \{(2\alpha, -\alpha, \alpha),\ \alpha \in \mathbf{R}\}$, $S_1 + S_2 = \mathbf{R}^3$.

2.2.11 Să se determine subspaţiile $S_1 \cap S_2$ şi $S_1 + S_2$ din $\mathbf{R}^3$ unde

$$S_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 = x_2 = x_3\},\ S_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 = -x_2 = -x_3\}.$$

R: $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$, $S_1 + S_2 = \{\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha - \beta),\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.

2.2.12 In $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbf{R})$ se dau subspaţiile:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ A \,|\, A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix},\ a, b \in \mathbf{R} \right\}, \\ S_2 &= \left\{ A \,|\, A = \begin{bmatrix} 0 & c & d \\ e & 0 & f \end{bmatrix},\ c, d, e, f \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

Să se arate că $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ şi $S_1 \oplus S_2 = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbf{R})$.

2.2.13 Fie $\mathcal{M}_n(K)$ spaţiul vectorial al matricelor pătratice de ordinul n. Să se arate că subspaţiile:

$$\mathcal{M}_n^s(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K),\ {}^tA = A\},\ \mathcal{M}_n^a(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K),\ {}^tA = -A\}$$

sunt suplimentare în $\mathcal{M}_n(K)$.

2.2.14 In $\mathbf{R}^4$ se dau subspaţiile:

$$S_1 = \{\mathbf{x} = (a, b, c, 0)\,,\ a, b, c \in \mathbf{R}\}\,,\ S_2 = \{\mathbf{x} = (0, 0, d, e)\,,\ d, e \in \mathbf{R}\}\,.$$

Să se arate că $S_1 + S_2 = \mathbf{R}^4$, dar S_1 şi S_2 nu sunt suplimentare.

2.3 Dependenţă şi independenţă liniară

2.3.1 Să se arate că sistemele de vectori:

$$S_1 = \{(1, 1, 0), (1, -1, -1)\}, \quad S_2 = \{(9, -1, -5), (7, -1, -4)\}$$

generează acelaşi subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^3$.

R: $\alpha_1(1, 1, 0) + \beta_1(1, -1, -1) = \alpha_2(9, -1, -5) + \beta_2(7, -1, -4)$.

2.3.2 Să se arate că în spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2, sistemele de polinoame $S_1 = \{x, x^2\}$ şi $S_2 = \{x + 2x^2, 2x + 5x^2\}$ generează acelaşi subspaţiu, adică $[S_1] = [S_2]$.

R: $\alpha_1 x + \beta_1 x^2 = \alpha_2(x + 2x^2) + \beta_2(2x + 5x^2)$, cu: $\alpha_1 = \alpha_2 + 2\beta_2$, $\beta_1 = 2\alpha_2 + 5\beta_2$ şi reciproc: $\alpha_2 = 5\alpha_1 - 2\beta_1$, $\beta_2 = -2\alpha_1 + \beta_1$.

2.3.3 Să se studieze liniara dependenţă a sistemelor de vectori:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \mathbf{v}_1 = (1, 2, -4), & \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1), & \mathbf{v}_3 = (1, 4, -2). \\ 2)\ \mathbf{v}_1 = (1, 1, 0), & \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1), & \mathbf{v}_3 = (0, 1, 1). \\ 3)\ \mathbf{v}_1 = (2, 1, 3, 1), & \mathbf{v}_2 = (1, 2, 0, 1), & \mathbf{v}_3 = (-1, 1, -3, 0). \end{array}$$

R: 1) Liniar dependenţi: $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. 2) Liniar independenţi. 3) Liniar dependenţi: $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

2.3.4 Să se studieze liniara dependenţă a sistemului de vectori:

$\mathbf{v}_1 = (2, 0, 1, 3, -1),\ \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, -1, 1),\ \mathbf{v}_3 = (0, -2, 1, 5, -3),\ \mathbf{v}_4 = (1, -3, 2, 9, -5).$

R: Liniar dependenţi: $\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$.

2.3.5 Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ a.î. vectorii:

$$\begin{array}{l} 1)\ \mathbf{u}_1 = (1, \alpha, \alpha)\,,\ \mathbf{u}_2 = (\alpha, 1, 2\alpha - 1) \in \mathbf{R}^3, \\ 2)\ \mathbf{u}_1 = (1, \alpha, \alpha, 1)\,,\ \mathbf{u}_2 = (\alpha, 1, \alpha, \alpha)\,,\ \mathbf{u}_3 = (1, 1, 1, \alpha) \in \mathbf{R}^4, \end{array}$$

să fie liniar independenţi.

2.3.6 In spaţiul vectorial $\mathbf{R}_n[X]$ al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi reali, se consideră sistemul de vectori

$$S = \{1, 1 + X, 1 + X + X^2, \ldots, 1 + X + \cdots + X^m,\ m \leq n\}.$$

Să se arate că sistemul S este liniar independent.

2.3.7 Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ a.î. sistemul

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 3 \\ 2 - \lambda & \lambda + 1 \end{bmatrix} \right\},$$

de matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ să fie liniar dependent.

R: $D(A) = 16\lambda + 64 = 0$, $\lambda = -4$.

2.4 Bază şi coordonate. Schimbări de baze şi coordonate

2.4.1 Să se arate că, în spaţiul vectorial aritmetic K^n, sistemul $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, format din vectorii

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1),$$

formează o bază.

R: Sistemul $\mathcal{B}$ este liniar independent. Intr-adevăr, egalitatea $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ este echivalentă cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, adică $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., $a_n = 0$. $\mathcal{B}$ este şi sistem de generatori pentru V. Intr-adevăr, pentru orice vector $\mathbf{x} \in V$ putem scrie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$.

2.4.2 In spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ al matricelor dreptunghiulare cu m linii şi n coloane, notăm cu E_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, matricea cu toate elementele nule, cu excepţia elementului situat pe linia i şi coloana j care îl luăm egal cu 1 şi fie $\mathcal{B} = \{E_{ij} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K),\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}\}$. Să se arate că $\mathcal{B}$ formează o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

R: Ca şi în exerciţiul precedent se constată că din egalitatea

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}E_{ij} = 0,$$

urmează $x_{ij} = 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, deci sistemul $\mathcal{B}$ este liniar independent, iar din

$$A = [a_{ij}] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij},$$

pentru orice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, urmează că $\mathcal{B}$ este şi sistem de generatori pentru spaţiul $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. In concluzie $\mathcal{B}$ este o bază a spaţiului $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, iar $\dim \mathcal{M}_{m\times n}(K) = m\cdot n$.

2.4.3 In spaţiul vectorial $K_n[X]$ al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi din K, sistemul $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ formează o bază. Deci $\dim K_n[X] = n + 1$.

2.4.4 In spaţiul vectorial real C al numerelor complexe, sistemul $\mathcal{B} = \{1, i\}$ formează o bază. Deci $\dim C = 2$.

2.4.5 Se dau sistemele de vectori:

1) $S = \{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1),\ \mathbf{u}_2 = (1, -1, 0),\ \mathbf{u}_3 = (2, -1, -1),\ \mathbf{u}_4 = (0, 1, -1)\} \subset \mathbf{R}^3$.
2) $S = \{\mathbf{u}_1 = (2, 1, 3, 1)\ ,\ \mathbf{u}_2 = (1, 2, 0, 1)\ ,\ \mathbf{u}_3 = (-1, 1, -3, 0)\} \subset \mathbf{R}^4$.

Să se determine o bază şi dimensiunea subspaţiului $[S]$.

R: 1) $r = 2$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. 2) $r = 2$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

2.4.6 In $\mathbf{R}^4$ se dă sistemul de vectori:

$$S = \{(1, 0, -1, -2),\ (-1, 1, 2, 3),\ (0, 1, 1, 1),\ (2, -1, 3, 1)\}.$$

Să se găsească un subsistem liniar independent maximal.

R: $r = 3$, un subsistem liniar independent maximal este format din ultimii trei vectori.

2.4.7 Se dă sistemul

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Să se determine o bază în $[S]$ şi $\dim[S]$.

R: $\dim[S] = 2$.

2.4.8 Să se determine dimensiunile sumei şi intersecţiei subspaţiilor generate de sistemele de vectori din $\mathbf{R}^3$:

$$U_3 = \{\mathbf{u}_1 = (2, 3, -1), \mathbf{u}_2 = (1, 2, 2), \mathbf{u}_3 = (1, 1, -3)\},$$
$$V_3 = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (1, 3, 3)\}.$$

R: Sistemul U_3 este liniar dependent. Subsistemul $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ formează o bază în $U = [U_3]$, $\dim U = 2$. Sistemul V_3 este liniar dependent. Subsistemul $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ formează o bază în $V = [V_3]$, $\dim V = 2$.

In $U + V$ o bază este $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\}$, $\dim(U + V) = 3$.

Subspaţiul $U \cap V$ conţine vectorii pentru care $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2$. Se obţine un sistem de 3 ecuaţii având $r = 3$ (doar $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1$ sunt liniar independenţi). Se găseşte $U \cap V = \{(3\lambda, 5\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbf{R}\}$, $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = 1$. Se verifică teorema lui Grassmann.

2.4.9 Să se verifice teorema lui Grassmann pentru subspaţiile din $\mathbf{R}^4$:

$$S_1 = \{\mathbf{x} = (a, b, a + b, c)\,,\ a, b, c \in \mathbf{R}\}\,,\ S_2 = \{\mathbf{x} = (p, p + q, q, p - q)\,,\ p, q \in \mathbf{R}\}\,.$$

2.4.10 Să se determine dimensiunile sumei şi intersecţiei subspaţiilor generate de sistemele de vectori din $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{aligned} U_3 &= \{\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2, -1),\ \mathbf{u}_2 = (0, -1, -1, 2),\ \mathbf{u}_3 = (-1, 2, 1, -5)\}, \\ V_3 &= \{\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 1),\ \mathbf{v}_2 = (-2, -1, -1, -1),\ \mathbf{v}_3 = (3, 0, 2, 3)\}. \end{aligned}$$

R: $\dim [U_3] = 2$, $\dim [V_3] = 3$. O bază în $[U_3] + [V_3]$ este $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. O bază în $[U_3] \cap [V_3]$ este $\{(1, 0, 1, 1)\}$.

2.4.11 Să se determine dimensiunile sumei şi intersecţiei subspaţiilor generate de sistemele de vectori din $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} U_3 &= \{\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1),\ \mathbf{u}_2 = (0, 3, 1),\ \mathbf{u}_3 = (2, -1, 1)\}, \\ V_2 &= \{\mathbf{v}_1 = (1, -2, 4),\ \mathbf{v}_2 = (-2, 4, -8)\}. \end{aligned}$$

2.4.12 In $\mathbf{R}^3$ se consideră subspaţiile:

$$U = [\{\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0)\}]\,,\ V = [\{\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)\,, \mathbf{v}_2 = (1, -1, \alpha)\}]\,,\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

1) Să se precizeze $\dim U$ şi $\dim V$.
2) Să se determine α a.î. $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.
3) Pentru $\alpha = 1$, să se arate $\mathbf{x} = (1, 5, 1) \in U \oplus V$.

R: 1) Evident: $\dim U = 1$ şi $\dim V = 2$, vectorii $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$ fiind liniar independenţi pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$.

2) Egalitatea $\alpha_1\mathbf{u}_1 = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2$ este echivalentă cu sistemul:

$$\alpha_1 = 2\beta_1 + \beta_2,\ 2\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2,\ 0 = \alpha\beta_2,$$

care admite numai soluţia banală d.d. $\alpha \neq 0$.

3) Vectorul $\mathbf{x} \in U \oplus V$ dacă există vectorul $\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 \in U$ şi vectorul $\mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 \in V$ a.î. $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Rezultă $\mathbf{x} = 4\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

2.4.13 Se dă submulţimea

$$S = \left\{ A = \begin{bmatrix} x + y & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & x - y \end{bmatrix},\ x, y, z \in \mathbf{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbf{R})\,.$$

1) Să se arate că S formează un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
2) Să se arate că matricele:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

aparţin lui S şi formează o bază a lui S.

3) Să se arate că matricea $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in S$ şi să se găsească coordonatele sale în baza $\{A_1, A_2, A_3\}$.

R: 2) Egalitateaa $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$ are loc numai pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
3) $A = A_1 - 2A_2 + A_3$.

2.4.14 Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ cu $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ baza canonică din $\mathbf{R}^3$ şi fie $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} \subset \mathbf{R}^3$ un sistem de trei vectori daţi prin

$$\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Să se arate că $\mathcal{B}'$ este o bază în $\mathbf{R}^3$ şi să se găsească coordonatele vectorului $\mathbf{u} = 6\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3$ în în baza $\mathcal{B}'$.

R: Deoarce $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ are $D(C) = 1 \neq 0$, $\mathcal{B}'$ este o nouă bază a lui $\mathbf{R}^3$, C fiind matricea schimbării de baze. Coordonatele vectorul $\mathbf{u}$ în baza $\mathcal{B}'$ sunt date de:

$$X' = C^{-1}X = \begin{bmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

adică $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3$.

2.4.15 Să se arate că $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$, unde:

$$\mathbf{e}'_1 = (1, 1, 1, 1), \ \mathbf{e}'_2 = (1, 1, -1, 1), \ \mathbf{e}'_3 = (1, -1, 1, -1), \ \mathbf{e}'_4 = (1, -1, -1, 1),$$

formează o bază şi să se determine coordonatele vectorului $\mathbf{u} = (1, 2, 1, 1) \in \mathbf{R}^4$ în această bază.

R: $\mathbf{u} = \dfrac{1}{2}(2, 1, 0, -1)_{\mathcal{B}'}$.

2.4.16 Să se arate că sistemul de vectori $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, daţi în baza canonică $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbf{R}^3$ prin:

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_2 = 6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_3 = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

formează o bază în $\mathbf{R}^3$ şi să se determine coordonatele vectorilor bazei $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{B}'$ şi coordonatele vectorului $\mathbf{u} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$ în baza $\mathcal{B}'$.

R: $\det C = 1$,

$$\mathbf{e}_1 = -2\mathbf{e}_1' + 5\mathbf{e}_2' - 9\mathbf{e}_3', \quad \mathbf{e}_2 = 6\mathbf{e}_1' - 15\mathbf{e}_2' + 28\mathbf{e}_3', \quad \mathbf{e}_3 = -3\mathbf{e}_1' + 8\mathbf{e}_2 - 15\mathbf{e}_3',$$

iar $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1' - \mathbf{e}_3'$.

2.4.17 In spaţiul vectorial $\mathbf{R}^3$ se consideră sistemele de vectori:

$$\begin{array}{l} \mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1' = (1,1,0), \mathbf{e}_2' = (1,0,0), \mathbf{e}_3' = (1,2,3)\}, \\ \mathcal{B}'' = (\mathbf{e}_1'' = (1,3,3), \mathbf{e}_2'' = (2,2,3), \mathbf{e}_3'' = (6,7,9)\}. \end{array}$$

1) Să se arate că $\mathcal{B}'$ şi $\mathcal{B}''$ sunt baze şi să se afle matricea de trecere de la $\mathcal{B}'$ la $\mathcal{B}''$.
2) Să se găsească coordonatele vectorului $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1' + 5\mathbf{e}_2' + 7\mathbf{e}_3'$ în baza $\mathcal{B}''$.

R: 1) Sistemele de vectori $\mathcal{B}'$ şi $\mathcal{B}''$ sunt liniar independente. Dacă $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ este baza canonică din $\mathbf{R}^3$, atunci $\mathbf{e}' = \mathbf{e}\, C'$, $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}\, C''$. Cum $\mathbf{e} = \mathbf{e}'\, C'^{-1}$, avem că $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}'\, C$, cu $C = C'^{-1}C''$, deci

$$C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2) Avem $X'' = C^{-1}X' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, adică $\mathbf{x} = \mathbf{e}_2'' + 2\mathbf{e}_3''$.

2.4.18 In spaţiul vectorial $\mathbf{R}^3$ se consideră sistemele de vectori:

$$\begin{array}{l} \mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1' = (1,1,2), \mathbf{e}_2' = (1,2,1), \mathbf{e}_3' = (2,1,1)\}, \\ \mathcal{B}'' = (\mathbf{e}_1'' = (0,1,1), \mathbf{e}_2'' = (1,0,1), \mathbf{e}_3'' = (1,1,0)\}. \end{array}$$

1) Să se arate că $\mathcal{B}'$ şi $\mathcal{B}''$ sunt baze şi să se găsească matricea de trecere de la $\mathcal{B}'$ la $\mathcal{B}''$.
2) Să se găsească coordonatele vectorului $\mathbf{x} = (1,2,2)$ în bazele $\mathcal{B}'$ şi $\mathcal{B}''$.
3) Să se verifice legea de schimbare a coordonatelor vectorului $\mathbf{x}$, la trecerea de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}''$.

2.4.19 Să se găsească formulele de transformare a coordonatelor unui vector când se trece de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}''$ din $\mathbf{R}^4$, dacă $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4'\}$, $\mathcal{B}'' = \{\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3'', \mathbf{e}_4''\}$, unde:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1' = (1,2-1,0), & \mathbf{e}_2' = (1,-1,1,1), & \mathbf{e}_3' = (-1,2,1,1), & \mathbf{e}_4' = (-1,-1,0,1), \\ \mathbf{e}_1'' = (2,1,0,1), & \mathbf{e}_2'' = (0,1,2,2), & \mathbf{e}_3'' = (-2,1,1,2), & \mathbf{e}_4'' = (1,3,1,2). \end{array}$$

R: $C = \dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & 5 \\ 5 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.4.20 Să se determine coordonatele vectorului $\mathbf{x} = (1, 2, 3, \ldots, n) \in \mathbf{R}^n$ în baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$, unde

$$\mathbf{e}'_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}'_2 = (1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ \mathbf{e}'_n = (1, 1, 1, \ldots, 1).$$

R: Avem $X' = C^{-1}X$, cu

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \ldots \\ n \end{bmatrix}.$$

Dar

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \ldots \\ -1 \\ n \end{bmatrix}.$$

2.4.21 Fie $\mathbf{R}_4[X]$ spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 4 şi baza:

$$\mathcal{B} = \left\{1, X, X^2, X^3, X^4\right\}.$$

1) Să se exprime sistemul $\mathcal{B}' = \left\{1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4\right\}$ în funcţie de baza $\mathcal{B}$.

2) Să se arate că sistemul $\mathcal{B}'$ formează o bază în $\mathbf{R}_4[X]$.

3) Să se scrie matricea C de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.

4) Folosind metoda lui Gauss-Jordan, să se găsească matricea C^{-1} de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}$.

R: 1) Folosind binomul lui Newton, se obţine:

$$\begin{cases} 1 = 1, \\ X - 1 = -1 + X, \\ (X-1)^2 = 1 - 2X + X^2, \\ (X-1)^3 = -1 + 3X^2 - 3X + X^3, \\ (X-1)^4 = 1 - 4X + 6X^2 - 4X^3 + X^4. \end{cases}$$

2) Egalitatea $\alpha_0 + \alpha_1 (X-1) + \alpha_2 (X-1)^2 + \alpha_3 (X-1)^3 + \alpha_4 (X-1)^4 = 0$, $\forall X \in \mathbf{R}$ are loc d.d. $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$.

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 4) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.4.22 In spaţiul $\mathbf{R}_n[X]$ se consideră bazele:

$$\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \dots, X^n\} \text{ şi } \mathcal{B}' = \{1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\}.$$

Să se determine coordonatele în baza $\mathcal{B}'$ ale polinomului $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$.

R: Se obţine polinomul Taylor al lui $P(X)$ în punctul $X_0 = a$:

$$P(X) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

2.4.23 Fie $\mathbf{R}_4[\cos x]$ spaţiul vectorial al polinoamelor în $\cos x$ de grad cel mult 4 şi baza:

$$\mathcal{B} = \left\{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x\right\}.$$

1) Să se exprime sistemul $\mathcal{B}' = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x\}$ în baza $\mathcal{B}$.
2) Să se arate că sistemul $\mathcal{B}'$ formează o bază în $\mathbf{R}_4[\cos x]$.
3) Să se scrie matricea C de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.
4) Folosind metoda lui Gauss-Jordan, să se găsească matricea C^{-1} de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}$.

R: 1) Deoarece: $\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x$ şi $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, se obţine:

$$\begin{cases} 1 = 1, \\ \cos x = \cos x, \\ \cos 2x = 1 - 2\cos^2 x, \\ \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x, \\ \cos 4x = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x. \end{cases}$$

2) Egalitatea $\alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x + \alpha_3 \cos 3x + \alpha_4 \cos 4x = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ are loc d.d. $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$.

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. 4) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$.

CAPITOLUL 3

APLICAŢII LINIARE PE SPAŢII VECTORIALE

3.1 Aplicaţii liniare. Nucleu şi imagine

3.1.1 Să se arate că aplicaţia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definită prin

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3),\ \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,$$

este o aplicaţie liniară.

3.1.2 Să se arate că aplicaţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, definită prin $f(\mathbf{x}) = (x_1 + 1, x_2, x_3)$, $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, nu este o aplicaţie liniară.

3.1.3 Să se arate că aplicaţia $f : K_n[X] \to K_{n-1}[X]$, definită prin

$$f(P))\,(X) = P'\,(X)\,,\ \forall\, X \in K,\ \ \forall\, P \in K_n[X],$$

care duce fiecare polinom de grad cel mult n în derivata sa, este o aplicaţie liniară pe $K_n[X]$.

3.1.4 Fie $P \in \mathcal{M}_m(K)$, $Q \in \mathcal{M}_n(K)$ două matrice pătratice. Să se arate că aplicaţia $T : \mathcal{M}_{m\times n}(K) \to \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, definită prin $T(A) = PAQ$, pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, este o transformare liniară pe $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

3.1.5 Să se arate că următoarele aplicaţii sunt liniare:

1) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $\quad f(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_3, 3x_2),\ \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.
2) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $\quad f(\mathbf{x}) = (x_1, 3x_1 - x_2, 2x_1),\ \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.
3) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\quad f(\mathbf{x}) = (0, 0),\ \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.
4) $f : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_{n-2}[X]$, $\quad f(P)(X) = P''(X),\ \forall\, X \in \mathbf{R},\ \forall\, P \in \mathbf{R}_n[X]$.

3.1.6 Să se precizeze care dintre următoarele aplicaţii este liniară:

1) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $\quad f(\mathbf{x}) = (3x_1 + 2x_2, x_2^2, 2x_1),\ \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.
2) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $\quad f(\mathbf{x}) = (4x_1 - 3x_2, 2x_1 + x_2 - 3x_3),\ \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.
3) $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $\quad f(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2},\ \forall\, x + iy \in \mathbf{C}$.

R: 1) Nu. 2) Da. 3) Nu.

3.1.7 Să se precizeze dacă aplicaţia $f : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ definită prin:

$$f(P)(X) = (a_0 - a_1) + 3a_2 X + (a_1 + 2a_2)X^2, \ \forall X \in \mathbf{R}.$$

oricare ar fi $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ este liniară.

3.1.8 Să se arate că aplicaţia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \ \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

este liniară.

3.1.9 Să se determine nucleul şi imaginea următoarelor aplicaţii liniare:

1) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2, \ f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_3, x_2 + x_3), \ \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$
2) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4, \ f(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3), \ \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$
3) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4, \ f(\mathbf{x}) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3, 0, 0), \ \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$
4) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4, \ f(\mathbf{x}) = (x_3, x_1 + x_2, x_1, x_1 - x_2), \ \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$

R: 1) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ implică: $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, deci

$$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{x} = \alpha(1, 1, -1), \ \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Ecuaţia $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ implică: $x_1 + x_3 = y_1$, $x_2 + x_3 = y_2$, sistem ce are soluţii oricare ar fi $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$, deci $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^2$.

2) $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{Im} f = \{\mathbf{y} = (\alpha, \beta, \gamma, -\alpha + \beta + \gamma), \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$.
3) $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{x} = \alpha(1, 1, 1), \ \alpha \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{Im} f = \{\mathbf{y} = (\alpha, \beta, 0, 0), \ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.
4) $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{Im} f = \{\mathbf{y} = (\alpha, \beta, \gamma, -\beta + 2\gamma), \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$.

3.1.10 Fie aplicaţiile liniare: $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$, $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $g(\mathbf{x}) = (-x_1 + x_2, 4x_1)$, $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Să se determine $g \circ f$ şi $f \circ g$ şi să se verifice că sunt aplicaţii liniare.

3.1.11 Fie U, V, W trei spaţii vectoriale peste acelaşi corp K şi aplicaţiile liniare $f : U \to V$, $g : V \to W$. Să se arate că $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ d.d. $g \circ f = 0$.

R: Pentru orice $\mathbf{u} \in U$, $f(\mathbf{u}) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$, deci $g(f(\mathbf{u})) = \mathbf{0}$ sau $g \circ f = 0$.
Reciproc, fie $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} f$, atunci există $\mathbf{u} \in U$ a.î. $\mathbf{v} = f(\mathbf{u})$. Avem:

$$g(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{u})) = (g \circ f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

adică $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} g$ şi deci $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

3.1.12 Fie $f : U \to V$, $g : V \to W$ două aplicaţii liniare cu proprietatea $g \circ f = 0$. Să se arate că:

1) Dacă aplicaţia f este surjectivă, atunci $g = 0$.
2) Dacă aplicaţia g este injectivă, atunci $f = 0$.

R: 1) Dacă aplicaţia f este surjectivă, pentru orice $\mathbf{v} \in V$ există $\mathbf{u} \in U$ a.î. $\mathbf{v} = f(\mathbf{u})$. Atunci $g(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{u})) = (g \circ f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, deci $g = 0$.

2) Din $g \circ f = 0$ deducem $(g \circ f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, pentru orice $\mathbf{u} \in U$, sau $g(f(\mathbf{u})) = \mathbf{0}$ şi cum aplicaţia g este injectivă, rezultă $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, pentru orice $\mathbf{u} \in U$, adică $f = 0$.

3.1.13 Fie U, V, W trei spaţii vectoriale peste acelaşi corp K şi aplicaţiile: $f : U \to V$, $g : V \to W$ a.î. aplicaţia compusă $g \circ f : U \to W$ să fie liniară. Să se arate că:

1) Dacă g este liniară şi injectivă, atunci f este liniară.

2) Dacă f este liniară şi surjectivă, atunci g este liniară.

Utilizând rezultatele precedente, să se arate că dacă aplicaţia $f : U \to V$ este liniară şi bijectivă (izomorfă), atunci aplicaţia inversă $f^{-1} : V \to U$ este liniară.

R: 1) Din $(g \circ f)(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha(g \circ f)(\mathbf{u}) + \beta(g \circ f)(\mathbf{v})$ şi liniaritatea lui g, rezultă $g(f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})) = g(\alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}))$. Dar g fiind injectivă, deducem

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}).$$

2) Cum f este surjectivă şi liniară, $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{u}_2)$, de unde, $g \circ f$ fiind liniară, deducem:

$$g(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1(g \circ f)(\mathbf{u}_1) + \alpha_2(g \circ f)(\mathbf{u}_2) = \alpha_1 g(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 g(\mathbf{v}_2).$$

Deoarece $f^{-1} \circ f = 1_U$ aplicaţia 1_U fiind liniară, iar f liniară şi surjectivă, din (b) rezultă că f^{-1} este liniară.

3.2 Aplicaţii liniare pe spaţii finit dimensionale

3.2.1 Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\} \subset \mathbf{R}^4$ şi $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2\} \subset \mathbf{R}^2$, baze în $\mathbf{R}^4$, respectiv în $\mathbf{R}^2$ şi fie aplicaţia liniară $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, definită prin:

$$f(\mathbf{e}_1) = \tilde{\mathbf{e}}_1,\ f(\mathbf{e}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_2,\ f(\mathbf{e}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2,\ f(\mathbf{e}_4) = \tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2.$$

1) Să se scrie matricea A a aplicaţiei f în perechea de baze $\mathcal{B}$ şi $\tilde{\mathcal{B}}$.

2) Să se scrie ecuaţiile aplicaţiei f în perechea de baze $\mathcal{B}$ şi $\tilde{\mathcal{B}}$.

3) Să se determine $\operatorname{Ker} f$ şi $\operatorname{Im} f$.

4) Să se găsească defectul şi rangul aplicaţiei f.

R: 1) şi 2) $f(\mathbf{e}) = \tilde{\mathbf{e}}\,A$ şi $\mathbf{y} = f\,(\mathbf{x})$ implică:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 + x_4, \\ y_2 = x_2 + x_3 - x_4. \end{cases}$$

3) $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{x} = (-\alpha - \beta, -\alpha + \beta, \alpha, \beta),\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^2$. 4) $d = 2$, $r = 2$.

3.2.2 Se dau aplicaţiile liniare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ şi $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, definite în bazele canonice din $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^2$ prin:

$$f\,(\mathbf{x}) = (x_1 + x_3, x_2 + x_3),\ \forall\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,$$
$$g\,(\mathbf{y}) = (y_1, y_1 - y_2, y_1 + y_2),\ \forall\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2.$$

1) Să se scrie matricele aplicaţiilor f şi g.

2) Să se găsească matricele aplicaţiilor $g \circ f$ şi $f \circ g$.

3.2.3 Să se determine nucleul şi imaginea aplicaţiei liniare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ a cărei matrice în bazele canonice din $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^2$ este

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2.4 Se dă aplicaţia liniară $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, definită prin

$$f(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3, x_1 + x_2 + x_3), \ \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$$

Să se scrie matricea şi să se determine nucleul şi imaginea aplicaţiei f.

3.2.5 Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbf{R}^3$ şi $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2\} \subset \mathbf{R}^2$, baze în $\mathbf{R}^3$, respectiv în $\mathbf{R}^2$ şi fie aplicaţiile liniare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definite prin:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = -2\tilde{\mathbf{e}}_1 + 3\tilde{\mathbf{e}}_2, \\ f(\mathbf{e}_2) = 3\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2, \\ f(\mathbf{e}_3) = -\tilde{\mathbf{e}}_1 + 5\tilde{\mathbf{e}}_2, \end{cases} \quad \begin{cases} g(\tilde{\mathbf{e}}_1) = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ g(\tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

1) Să se scrie matricele A şi B ale aplicaţiilor f şi g în perechea de baze $\mathcal{B}$ şi $\tilde{\mathcal{B}}$.
2) Să se scrie ecuaţiile aplicaţiilor f şi g în perechea de baze $\mathcal{B}$ şi $\tilde{\mathcal{B}}$.
3) Să se verifice că f este surjectivă, iar g este injectivă.
4) Să se determine subspaţiile $\operatorname{Ker} f$ şi $\operatorname{Im} g$, precizând câte o bază în fiecare subspaţiu.
5) Să se găsească defectul şi rangul aplicaţiilor f şi g.
6) Să se arate că $f \circ g = 1_{\mathbf{R}^2}$ şi să se calculeze $g \circ f$.

R: 1) $f(\mathbf{e}) = \tilde{\mathbf{e}}\, A$, $g(\tilde{\mathbf{e}}) = \mathbf{e}\, B$ cu:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$ implică:

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 + 3x_2 - x_3, \\ y_2 = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3y_1 - 2y_2, \\ x_2 = 2y_1 - y_2, \\ x_3 = -y_1 + y_2. \end{cases}$$

3) $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^2$, primul sistem fiind compatibil oricare ar fi $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$, deci f este surjectivă. $\operatorname{Ker} g = \{\mathbf{0}\}$, al doilea sistem pentru $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admiţând numai soluţia banală, deci g este injectivă.

4) $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{u} = \alpha(13\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3), \ \alpha \in \mathbf{R}\}$, iar $\operatorname{Im} g = \{\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3), \ x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$, al doilea sistem fiind compatibil d.d. determinantul caracteristic este egal cu 0. O bază în $\operatorname{Im} g$ este $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1)\}$.

5) $\operatorname{def} f = \dim \operatorname{Ker} f = 1$, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 2$, $\operatorname{def} g = \dim \operatorname{Ker} g = 0$, $\operatorname{rg} g = \dim \operatorname{Im} g = 2$.

6) Deoarece $f(\mathbf{e}) = \tilde{\mathbf{e}}\, A$, $g(\tilde{\mathbf{e}})\, B$, avem că:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\tilde{\mathbf{e}}) &= f(g(\tilde{\mathbf{e}})) = f(\mathbf{e}\, B) = f(\mathbf{e})\, B = \tilde{\mathbf{e}}\,(AB),\\ (g \circ f)(\mathbf{e}) &= g(f(\mathbf{e})) = g(\tilde{\mathbf{e}}\, A) = g(\tilde{\mathbf{e}})\, A = \mathbf{e}\,(BA),\end{aligned}$$

cu $AB = I_2$ şi

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 13 & -13 \\ -7 & 8 & -7 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.2.6 Se dă transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$, ale cărei ecuaţii în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ sunt

$$y_1 = x_1, \;\; y_2 = x_1 + x_2 + x_3, \;\; y_3 = x_1.$$

Să se determine $\operatorname{Ker} T$ şi $\operatorname{Im} T$.

R: $\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{x} = (0, -\alpha, \alpha),\ \alpha \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{Im} T = \{\mathbf{y} = (\alpha, \beta, \alpha),\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.

3.2.7 Să se determine nucleul şi imaginea aplicaţiei liniare $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n+1}$, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, ale cărei ecuaţii în bazele canonice din $\mathbf{R}^n$ şi respectiv $\mathbf{R}^{n+1}$, sunt

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, n+1},$$

ştiind că rangul matricei $A = [a_{ij}]$ este n.

R: $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$, *iar*

$$\operatorname{Im} f = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}),\ \Delta_{\text{car}, n+1} = 0\},$$

unde

$$\Delta_{\text{car}, n+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & y_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & y_{n+1} \end{vmatrix}.$$

3.2.8 Să se determine nucleul şi imaginea aplicaţiei liniare $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \; \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

3.2.9 Să se determine nucleul şi imaginea aplicaţiei liniare $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^2$:

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_k, x_{k+1} + \cdots + x_n), \; \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

3.2.10 In spaţiul vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Să se determine aplicaţia liniară $f : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ a.î.

$$f(A_1) = -3, \; f(A_2) = 0, \; f(A_3) = -5, \; f(A_4) = 2.$$

R: Ecuaţia aplicaţiei f în baza canonică din $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ este de forma

$$f(A) = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{21} + \alpha_4 a_{22},\ \forall A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}).$$

Condiţiile problemei conduc la sistemul

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -3, \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = -5, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2, \end{cases}$$

cu soluţia: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = -4$. Deci

$$f(A) = a_{11} - 2a_{12} + 3a_{21} - 4a_{22}\ \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}).$$

3.2.11 In $\mathbf{R}^3$ se dau vectorii:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_1 = (2,3,5), & \mathbf{v}_2 = (0,1,2), & \mathbf{v}_3 = (1,0,0), \\ \mathbf{w}_1 = (1,1,1), & \mathbf{w}_2 = (1,1,-1), & \mathbf{w}_3 = (2,1,2). \end{array}$$

Să se determine transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ a.î. $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $i = 1,2,3$.

R: Condiţiile problemei implică:

$$\begin{cases} 2T(\mathbf{e}_1) + 3T(\mathbf{e}_2) + 5T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ T(\mathbf{e}_2) + 2T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ T(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \end{cases}$$

de unde $T(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $T(\mathbf{e}_2) = -11\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $T(\mathbf{e}_3) = 6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$.

3.3 Legea de schimbare a matricei aplicaţiei liniare

3.3.1 Se dă aplicaţia liniară $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definită în bazele canonice din $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^2$ prin

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

1) Să se scrie matricea aplicaţiei f.

2) Să se găsească matricea aplicaţiei f în perechea de baze $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ din $\mathbf{R}^3$ şi $\widetilde{\mathcal{B}}' = \{\widetilde{\mathbf{e}}_1', \widetilde{\mathbf{e}}_2'\}$ din $\mathbf{R}^2$, unde:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1' = (0,1,1), & \mathbf{e}_2' = (1,0,1), & \mathbf{e}_3' = (1,1,0), \\ \widetilde{\mathbf{e}}_1' = (1,1), & \widetilde{\mathbf{e}}_2' = (2,3). & \end{array}$$

3.3.2 Se dă transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definită în baza canonică prin:

$$T(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,\ T(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3,\ T(\mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3,$$

Să se găsească matricea transformării T în baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, unde:

$$\mathbf{e}_1' = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3),\ \mathbf{e}_2' = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3),\ \mathbf{e}_3' = \frac{1}{3}(-2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

R: $\det C = -1$, $C^{-1} = C$, $A' = \text{diag}\,(7,4,1)$.

3.3.3 Se consideră transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definită în baza canonică prin:

$$T(\mathbf{e}_1) = (1,1,1),\ T(\mathbf{e}_2) = (0,1,0),\ T(\mathbf{e}_3) = (0,1,0).$$

Să se găsească matricea transformării T în baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, unde:

$$e_1' = (1,0,0),\ \mathbf{e}_2' = (1,1,0),\ \mathbf{e}_3' = (1,1,1).$$

R: $A' = C^{-1}AC =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3.4 Să se găsească matricea transformării liniare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, definită în baza canonică prin

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \quad T(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_4, \quad T(\mathbf{e}_4) = -\mathbf{e}_1.$$

în baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4'\}$, unde

$$\mathbf{e}_1' = (3,2,1,0),\ \mathbf{e}_2' = (1,1,1,1),\ \mathbf{e}_3' = (3,-2,1,0),\ \mathbf{e}_4' = (-1,1,-1,1).$$

R: $\det C = 16$,

$$C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.4 Diagonalizarea transformărilor liniare

3.4.1 Să se determine valorile proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare ale transformărilor liniare T ale căror matrice sunt:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.\ 2)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.\ 3)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

şi să se verifice că $p(A) = 0$ (teorema lui Cayley-Hamilton).

R: 1) $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ cu: $\lambda_1 = 1$, $S(\lambda_1) = [\{(-1,1)\}]$, $\lambda_2 = 3$, $S(\lambda_2) = [\{(1,1)\}]$.
2) $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ cu: $\lambda_1 = -1$, $m_1 = 3$, $S(\lambda_1) = [\{(-1,-1,1)\}]$.
3) $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 16\lambda - 16 = 0$ cu:
$\lambda_1 = 2$, $m_1 = 3$, $S(\lambda_1) = [\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}]$,
$\lambda_2 = -2$, $m_2 = 1$, $S(\lambda_2) = [\{(-1,1,1,1)\}]$.

3.4.2 Să se determine valorile proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare ale transformărilor liniare T ale căror matrice sunt:

$$1)\ A=\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.\ 2)\ A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.\ 3)\ A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$4)\ A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 16 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.\ 5)\ A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.\ 6)\ A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$7)\ A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.\ 8)\ A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.\ 9)\ A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

R: Valorile proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare sunt:
1) $\lambda_1 = 10$, $[(-3,1)]$, $\lambda_2 = 0$, $[(1,3)]$.
2) $\lambda_1 = 2$, $[(1,1)]$, $\lambda_2 = 8$, $[(-1,1)]$.
3) $\lambda_1 = 2$, $[(1,2,4)]$, $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$, $[(1,1,1)]$.
4) $\lambda_1 = 2$, $[(1,0,1)]$, $\lambda_2 = 18$, $[(-1,4,1)]$, $\lambda_3 = 0$, $[(2,1,-2)]$.

$$5)\ \begin{cases} \lambda_1 = 3, & [(1,1,1)]\,, \\ \lambda_2 = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & [(-2-\lambda_2, 1+\lambda_2, 1)]\,, \\ \lambda_3 = -\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & [(-2+-\lambda_3, 1+\lambda_3, 1)]\,. \end{cases}$$

6) $\lambda_1 = 4$, $[(1,0,0)]$, $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$, $[(0,1,1)]$.
7) $\lambda_1 = 0$, $m_1 = 2$, $[(0,1,-3)]$, $\lambda_2 = -1$, $[(0,0,1)]$.
8) $\lambda_1 = 3$, $[(1,-2,-2)]$, $\lambda_2 = 2$, $m_2 = 2$, $[(1,1,0), (-1,0,1)]$.
9) $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 3$, $[(-1,1,-2)]$.

3.4.3 Să se găsească o bază în $\mathbf{R}^3$ în care matricea transformării liniare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definită în baza canonică prin:

$$1)\ \begin{cases} T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \\ T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_3, \\ T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \\ T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1, \end{cases}$$

să aibă forma diagonală.

R: 1) $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0$, cu: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$; baza este: $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, unde

$$\mathbf{e}_1' = (1,-1,1),\ \mathbf{e}_2' = (-1,0,1),\ \mathbf{e}_3' = (1,2,1),$$

iar $A' = \mathrm{diag}(-1,0,2)$.

2) $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, cu $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 2$, $\lambda_2 = -1, m_2 = 1$; baza este: $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, unde

$$\mathbf{e}_1' = (1,0,1),\ \mathbf{e}_2' = (0,1,0),\ \mathbf{e}_3' = (-1,0,1),$$

iar $A' = \mathrm{diag}(1,1,-1)$.

3.4.4 Să se studieze existenţa unei baze în care matricele următoarelor transformări liniare să aibă forma diagonală:

$$1)\ A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.\ 2)\ A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}.\ 3)\ A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{bmatrix}.$$

R: 1) $\lambda^3-3\lambda-2=0$, cu: $\lambda_1=2$, $m_1=1$, $S(\lambda_1)=[\{(1,1,1)\}]$, $\dim S(\lambda_1)=1$, $\lambda_2=-1$, $m_2=2$, $S(\lambda_2)=[\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}]$, $\dim S(\lambda_1)=2$, deci există o bază în care matricea transformării T are forma diagonală. Sau, polinomul minimal: $m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)=\lambda^2-\lambda-2$ şi $m(A)=0$.

2) $\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=0$ cu: $\lambda_1=2$, $m_1=3$, $S(\lambda_1)=[\{(1,2,0),(0,0,1)\}]$, $\dim S(\lambda_1)=2$, deci *nu* există o bază în care matricea transformării T are forma diagonală. Sau: $m(\lambda)=(\lambda-2)$ şi $m(A)\neq 0$.

3) $\lambda^3-5\lambda-\lambda^2-3=0$, cu: $\lambda_1=3$, $m_1=1$, $S(\lambda_1)=\left[\left\{\left(\frac{1}{2},1,1\right)\right\}\right]$, $\dim S(\lambda_1)=1$, $\lambda_2=-1$, $m_2=2$, $S(\lambda_2)=[\{(1,2,1)\}]$, $\dim S(\lambda_2)=1$, deci *nu* există o bază în care matricea transformării T are forma diagonală. Sau: $m(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)=\lambda^2-2\lambda-3$ şi $m(A)\neq 0$.

3.4.5 Să se calculeze puterea a n-a a matricei $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3\\ 3 & 2 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

R: Matricea A este asemenea cu o matrice diagonală. Intr-adevăr, $\lambda^3-12\lambda+16=0$, cu $\lambda_1=-4$, $m_1=1$, $\lambda_2=2,$, $m_2=2$ şi

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\ C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A'=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\ (A')^n=\begin{bmatrix} (-4)^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}.$$

Din $A'=C^{-1}AC$ deducem $A=CA'C^{-1}$ şi deci $A^n=C(A')^nC^{-1}$, adică

$$A^n=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} (-4)^n+2^n & 0 & (-4)^n-2^n\\ -(-4)^n+2^n & 2^{n+1} & -(-4)^n+2^n\\ (-4)^n-2^n & 0 & (-4)^n+2^n\end{bmatrix}$$

3.4.6 Se consideră matricele

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R}).$$

1) Să se arate că matricele A şi B sunt asemenea cu matrice diagonale.

2) Să se verifice dacă matricele $A+B$, AB, BA sunt asemenea cu matrice diagonale.

R: 1) $A \sim A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, B este diagonală.

2) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(\lambda - 1)^2 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 2$, dar $S(\lambda_1) = [\{(1,0)\}]$, $\dim S(\lambda_1) = 1$, deci $A + B$ nu este asemenea cu o matrice diagonală.

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda^2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $m_1 = 2$ dar $S(\lambda_1) = [\{(1,0)\}]$, $\dim S(\lambda_1) = 1$, deci AB nu este asemenea cu o matrice diagonală. $BA = 0$, deci BA este asemenea cu o matrice diagonală.

3.4.7 Fie $T : V \to V$ o transformare liniară, $\lambda \in K$ o valoare proprie a lui T şi $\mathbf{u} \in V$ un vector propriu corespunzător valorii proprii λ.

1) Să se arate că pentru orice $p \in \mathbf{N}$, λ^p este valoare proprie a transformării liniare $T^p = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (de p ori) şi $\mathbf{u}$ vector propriu corespunzător.

2) Să se arate că dacă T este bijectivă, atunci $\lambda \neq 0$ şi $\dfrac{1}{\lambda}$ este valoare proprie pentru T^{-1} şi $\mathbf{u}$ vector propriu corespunzător. Să se deducă de aici că 1) are loc pentru orice $p \in \mathbf{Z}$.

3) Să se arate că $P(T)(\mathbf{u}) = P(\lambda)\mathbf{u}$ pentru orice polinom P.

4) Utilizând rezultatele precedente să se arate că dacă $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este asemenea cu o matrice diagonală, atunci pentru orice $p \in \mathbf{N}$, A^p este asemenea cu o matrice diagonală. Dacă, în plus, A este nesingulară, afirmaţia este adevărată pentru orice $p \in \mathbf{Z}$.

R: 1) Cum $T(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$, avem $T^2(\mathbf{u}) = T(T(\mathbf{u})) = \lambda^2\mathbf{u}$ şi prin inducţie se deduce că $T^p(\mathbf{u}) = \lambda^p\mathbf{u}$.

2) Dacă $\lambda = 0$ ar fi valoare proprie pentru T, atunci $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ cu $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, adică $\operatorname{Ker} T \neq \{\mathbf{0}\}$. Contradicţie. Apoi, din $T(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$, rezultă $(T^{-1} \circ T)(\mathbf{u}) = \lambda T^{-1}(\mathbf{u})$, de unde $T^{-1}(\mathbf{u}) = \lambda^{-1}\mathbf{u}$.

3) rezultă din 1).

4) Dacă A este asemenea cu o matrice diagonală A', atunci $A = CA'C^{-1}$ şi $A^2 = CA'^2C^{-1}$, A'^2 fiind o matrice diagonală etc. Dacă A este nesingulară şi A' este nesingulară şi $A^{-1} = (CA'C^{-1})^{-1} = CA'^{-1}C^{-1}$.

3.4.8 Să se arate că dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este asemenea cu o matrice diagonală atunci matricea ${}^tA$ este asemenea cu o matrice diagonală.

R: Fie $A' = C^{-1}AC$, cu A' o matrice diagonală. Atunci ${}^tA'$ este tot diagonală şi

$${}^tA' = {}^t(C^{-1}AC) = {}^tC \cdot {}^tA \cdot {}^tC^{-1} = \left({}^tC^{-1}\right)^{-1} \cdot {}^tA \cdot {}^tC^{-1},$$

deci ${}^tA$ este asemenea cu o matrice diagonală.

3.4.9 Fie T_1, $T_2 \in L(V)$ a.î. una dintre transformări este bijectivă. Să se arate că $T_1 \circ T_2$ şi $T_2 \circ T_1$ au acelaşi polinom caracteristic.

R: Fie $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(K)$ matricele celor două transformări liniare într-o bază din V. Să presupunem că T_1 este bijectivă, deci matricea A_1 este nesingulară şi deci inversabilă. Putem atunci scrie:

$$A_2A_1 = (A_1^{-1}A_1)(A_2A_1) = A_1^{-1}(A_1A_2)A_1,$$

adică matricele A_2A_1 şi A_1A_2 sunt asemenea şi deci au acelaşi polinom caracteristic.

3.4.10 Transformare liniară $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ are, în baza canonică din $\mathbf{R}^4$, matricea:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\ 2)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Să se găsească o bază în $\mathbf{R}^4$ în care matricea transformăarii T are forma Jordan.

R: 1) Ecuaţia caracteristică este: $(\lambda - 1)^4 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 4$, iar $S(\lambda_1) = [\{\mathbf{e}_1' = (1, 0, 0, 0)\}]$, $\dim S(\lambda_1) = 1$, deci *nu* există o bază în care matricea transformării T are forma diagonală.

Căutăm un vector $\mathbf{e}_2'$ a.î. $T(\mathbf{e}_2') = 1 \cdot \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2'$. Se obţine: $\mathbf{e}_2' = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$. Căutăm apoi un vector $\mathbf{e}_3'$ a.î. $T(\mathbf{e}_3') = 1 \cdot \mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3'$. Se obţine: $\mathbf{e}_3' = \left(0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, 0\right)$. In fine, căutăm un vector $\mathbf{e}_4'$ a.î. $T(\mathbf{e}_4') = 1 \cdot \mathbf{e}_3' + \mathbf{e}_4'$. Se obţine: $\mathbf{e}_4' = \left(0, \frac{5}{16}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

In baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4'\}$, în care primul vector este propriu iar ceilalţi principali, matricea transformării T are forma Jordan:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Ecuaţia caracteristică este: $(\lambda - 1)^4 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $m_1 = 4$, iar subspaţiul propriu corespunzător $S(\lambda_1) = [\{(1, -2, -5, 0), (0, 0, -1, 1)\}]$, $\dim S(\lambda_1) = 2$, deci *nu* există o bază în care matricea transformării T are forma diagonală.

Corespunzător vectorului propriu $\mathbf{e}_1' = (1, -2, -5, 0)$, căutăm un vector principal $\mathbf{e}_2'$ a.î. $T(\mathbf{e}_2') = 1 \cdot \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2'$. Se obţine: $\mathbf{e}_2' = (0, 1, 0, -6)$. Corespunzător vectorului propriu $\mathbf{e}_3' = (0, 0, -1, 1)$, căutăm un vector principal $\mathbf{e}_4'$ a.î. $T(\mathbf{e}_4') = 1 \cdot \mathbf{e}_3' + \mathbf{e}_4'$. Se obţine: $\mathbf{e}_4' = (0, 0, 0, -1)$.

In baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4'\}$ matricea transformării T are forma Jordan:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.4.11 Transformarea liniară $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ are, în baza canonică din $\mathbf{R}^3$, matricea:

$$1)\ A=\begin{bmatrix}6&6&-15\\1&5&-5\\1&2&-2\end{bmatrix}.\ 2)\ A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{bmatrix}.\ 3)\ A=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\2&-3&-1\end{bmatrix}.$$

Să se găsească o bază în $\mathbf{R}^3$ în care matricea transformării T are forma Jordan.

R: 1) Ecuaţia caracteristică este: $(\lambda-3)^3=0$, $\lambda_1=3$, $m_1=3$, iar din $x+2y-5z=0$, avem $S(\lambda_1)=[\{(3,1,1),(-2,1,0)\}]$, $\dim S(\lambda_1)=2$, deci *nu* există o bază în care matricea transformării T are forma diagonală.

Vectorului propriu $\mathbf{e}'_1=(3,1,1)$, îi corespunde vectorul principal $\mathbf{e}'_2=(1,0,0)$. In baza $\mathcal{B}'=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$, cu $\mathbf{e}'_3=(-2,1,0)$, matricea transformării T are forma Jordan:

$$A'=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

2) Ecuaţia caracteristică este: $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$, $\lambda_1=1$, $m_1=2$, $\lambda_2=2$, $m_2=1$. Se obţine:

$$A'=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},\ \text{cu}\ C=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&2&4\end{bmatrix}.$$

3) Ecuaţia caracteristică este: $\lambda^2(\lambda+1)=0$. Se obţine:

$$A'=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\ \text{cu}\ C=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&1&0\\-3&-2&1\end{bmatrix}.$$

CAPITOLUL 4

FORME LINIARE, BILINIARE ŞI PĂTRATICE

4.1 Forme liniare. Spaţiul vectorial dual

4.1.1 Să se verifice dacă următoarele aplicaţii sunt forme liniare:

1) $p_i : K^n \to K$, $p_i(\mathbf{x}) = x_i$, pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$, $i = \overline{1,n}$, numite proiecţiile canonice ale lui K^n în K.

2) $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$, $f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \mathcal{R}e\,(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$, dacă: (i) $\mathbf{C}^n$ este spaţiu vectorial real, (ii) $\mathbf{C}^n$ este spaţiu vectorial complex.

3) $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$, $f(z_1, z_2, \dots, z_n) = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.

4) $D_{X_0} : K_n[X] \to K$, $D_{X_0}(P) = P'(X_0)$, cu $X_0 \in K$ fixat.

5) $I : C[a,b] \to \mathbf{R}$, $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, pentru orice $f \in C[a,b]$, unde $C[a,b]$ este spaţiul vectorial al funcţiilor continue pe intervalul $[a,b]$, cu valori reale.

R: 1) Da. 2) (i) da, (ii) nu. 3) Nu. 4) Da. 5) Da.

4.1.2 Să se găsească expresia analitică a formei liniare $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definită în baza canonică din $\mathbf{R}^n$ prin:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + \cdots + (-1)^{n-1} x_n, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

în baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\}$, unde

$$\mathbf{e}'_1 = (0, 1, \dots, 1, 1),\ \mathbf{e}'_2 = (1, 0, \dots, 1, 1),\ \dots,\ \mathbf{e}'_n = (1, 1, \dots, 1, 0).$$

R: Dacă n este par, $A' = AC = (-1, 1, -1, \dots, -1, 1)$; dacă n este impar $A' = AC = (0, 2, 0, 2, \dots, 2, 0)$.

4.1.3 Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ baza canonică din $\mathbf{R}^4$ şi $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ baza duală acesteia. Fie $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$ baza din $\mathbf{R}^4$ definită prin

$$\mathbf{e}'_1 = (0, 1, 1, 1),\ \mathbf{e}'_2 = (1, 0, 1, 1),\ \mathbf{e}'_3 = (1, 1, 0, 1),\ \mathbf{e}'_4 = (1, 1, 1, 0).$$

Să se determine baza $\mathcal{B}'^*$ duală bazei $\mathcal{B}'$, în funcţie de $\mathcal{B}^*$.

R: Dacă $\mathbf{e}' = \mathbf{e}\,C$, atunci $f'^* = C^{-1}f^*$, dar $D(C) = -3$ şi

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

4.1.4 Să se găsească formele liniare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, pentru care

$$f(0,1,-1) = 0, \quad f(-2,1,1) = 0.$$

R: $f(\mathbf{x}) = \alpha(x_1 + x_2 + x_3)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

4.1.5 Să se scrie expresiile analitice ale formei liniare $f : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}$, definită prin $f(P) = \int_0^1 P(X)\,dX$, în baza $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ şi în baza $\mathcal{B}' = \{1, 1+X, 1+X^2, \ldots, 1+X^n\}$.

R: Avem că $f(X^k) = \int_0^1 X^k dX = \dfrac{1}{k+1}$, $k = \overline{0,n}$ şi deci

$$f(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_n.$$

Apoi $A' = AC$ cu

$$A = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}\right],\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Deci: $f\left(a_0' + a_1'(1+X) + \cdots + a_n'(1+X^n)\right) = a_0' + \dfrac{3}{2}a_1' + \dfrac{4}{3}a_3' + \cdots + \dfrac{n+2}{n+1}a_n'.$

4.2 Forme biliniare

4.2.1 Să se verifice dacă următoarele aplicaţii sunt forme biliniare:

1) $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\quad g(x,y) = (x+a)(y+b)$, *cu* $a, b \in \mathbf{R}$.
2) $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\quad g(x,y) = x^n y, n \in \mathbf{N}$.
3) $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\quad g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n, \forall\,\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.

R: 1) Numai dacă $a = b = 0$. 2) Numai dacă $n = 1$. 3) Da.

4.2.2 Se dă aplicaţia $g : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, definită prin

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 - 2x_2y_2 - 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 - 3x_3y_3,$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$. Se cere:
1) Să se verifice că g este o formă biliniară pe $\mathbf{R}^3$.
2) Să se scrie matricea formei g în baza canonică din $\mathbf{R}^3$.

R: 2) $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

4.2.3 Numim *urmă* a matricei $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ scalarul notat $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Să se verifice că aplicaţia $g : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ este formă biliniară, unde:

$$g(A, B) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\right), \ \forall A = [a_{ij}], \ B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

4.2.4 Se dă forma biliniară $g : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, a cărei matrice în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ este

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) Să se scrie expresia analitică a formei g în baza canonică din $\mathbf{R}^3$.
2) Să se arate că forma g este simetrică.
3) Să se găsească matricea formei g în baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, unde

$$\mathbf{e}'_1 = (1, 1, 1), \ \mathbf{e}'_2 = (1, 2, 1), \ \mathbf{e}'_3 = (0, 0, 1).$$

R: 1) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_3 - x_2y_2 + 2x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_2$.
2) ${}^tG = G$. 3) $G' = {}^tCGC$,

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.2.5 Să se găsească expresia analitică a formei biliniare

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_4y_4,$$

în baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$, unde

$$\mathbf{e}'_1 = (1, 1, 0, 0), \ \mathbf{e}'_2 = (0, 0, 1, 0), \ \mathbf{e}'_3 = (1, -1, 0, 0), \ \mathbf{e}'_4 = (0, 0, 0, 1).$$

R: $G' = {}^tCGC = \operatorname{diag}(6, 3, 2, 4)$.

4.2.6 Fie $g : V \times V \to K$ o formă biliniară. Să se arate că există formele liniare $f_1, f_2 \in V^*$ a.î. $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x}) \cdot f_2(\mathbf{y})$ d.d. $\operatorname{rg} g = 1$.

R: Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ o bază în V şi

$$f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \ \ f_2(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} b_j y_j, \ \ g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j.$$

Egalitatea din enunţ este echivalentă cu $g_{ij} = a_i b_j$, $i, j = \overline{1, n}$, ceea ce se întâmplă d.d. $\operatorname{rg} G = 1$, unde $G = [g_{ij}]$.

4.2.7 Se dă forma biliniară

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_3 + x_2y_4 + 2x_3y_1 + x_3y_3 - 2x_4y_1 + x_4y_2.$$

Să se arate că mulţimea $S = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^4,\ g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^4$ numit subspaţiul nul al lui g relativ la al doilea argument. Să se determine o bază şi dimensiunea acestui subspaţiu.

R: $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ implică:

$$\begin{cases} 4y_1 - 2y_2 = 0, \\ y_3 + y_4 = 0, \\ 2y_1 + y_3 = 0, \\ -2y_1 + y_2 = 0, \end{cases}$$

cu $r = 3$. Deci, $S = [(1, 2, -2, 2)]$, $\dim S = 1$.

4.3 Forme pătratice

4.3.1 Să se scrie formele pătratice definite de următoarele forme biliniare simetrice:

1) $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1$.
2) $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$.

4.3.2 Se dă forma pătratică $h(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$. Să se scrie matricea formei h în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ şi să se găsească rangul ei.

4.3.3 Se dă forma pătratică $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.
1) Să se scrie matricea formei h în baza canonică din $\mathbf{R}^3$.
2) Să se găsească expresia analitică a formei biliniare polare lui h în baza

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1' = (1, 1, -1), \mathbf{e}_2' = (1, 0, 1), \mathbf{e}_3' = (1, -1, 1)\}.$$

R: 1) $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. 2) $G' = {}^tCGC = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4.3.4 Aplicând metoda lui Gauss formei pătratice

$$h(\mathbf{u}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2,$$

să se determine o expresie canonică şi baza corespunzătoare.

R: Se obţine, în două etape, expresia canonică

$$h(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(x_1'')^2 - 2(x_2'')^2 + (x_3'')^2,$$

cu $x_1'' = 2x_1 + x_2 + 2x_3$, $x_2'' = \dfrac{1}{2}x_2 + x_3$, $x_3'' = x_3$, în baza formată de vectorii:

$$\mathbf{e}_1'' = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right),\ \mathbf{e}_2'' = (1, -2, 0),\ \mathbf{e}_3'' = (0, -2, 1).$$

4.3.5 Utilizând metoda lui Gauss să se determine expresiile canonice ale următoarelor forme pătratice şi bazele corespunzătoare:

1) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$.
2) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 6x_2x_3 + 4x_3^2$.
3) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$.
4) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$.

R: 1) $h(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{3}(-3x_2 - x_3)^2 + \frac{7}{3}x_3^2$.
2) $h(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{2}(2x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}x_3^2$.
3) $h(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2x_3$ şi se face schimbarea de coordonate:

$$x_1 = x_1' - 3x_2' + x_3',\ \ x_2 = x_2' + x_3',\ \ x_3 = x_2' - x_3'.$$

4) $h(\mathbf{x}) = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3$ şi se face schimbarea de coordonate:

$$x_1 = x_1' + x_2' + 3x_3',\ \ x_2 = x_2' + x_3',\ \ x_3 = x_2' - x_3'.$$

4.3.6 Utilizând metoda lui Gauss să se determine expresiile canonice ale următoarelor forme pătratice, date prin matricele lor în baza canonică:

$$1)\ G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\ 2)\ G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.\ 3)\ G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.3.7 Utilizând metoda lui Jacobi să se determine expresiile canonice ale următoarelor forme pătratice şi bazele corespunzătoare:

1) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
2) $h(\mathbf{x}) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2^2 + 4x_3^2$.
3) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4$.

R: 1) $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -3$, $\Delta_3 = -7$. Baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, se caută de forma:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_1' = c_{11}\mathbf{e}_1, & g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1') = 1, \\ \mathbf{e}_2' = c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2, & g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2') = 0,\ g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2') = 1, \\ \mathbf{e}_3' = c_{13}\mathbf{e}_1 + c_{23}\mathbf{e}_2 + c_{33}\mathbf{e}_3, & g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3') = 0,\ g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3') = 0,\ g(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3') = 1. \end{array}$$

Cum $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, rezultă: $C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

2) $\Delta_1 = 5$, $\Delta_2 = 26$, $\Delta_3 = 80$. Baza $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, se caută ca la punctul 1).

Cum $G = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, rezultă: $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{13} & \frac{3}{20} \\ 0 & \frac{5}{26} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & \frac{13}{40} \end{bmatrix}$.

3) Deoarece $\Delta_2 = 0$, efectuăm schimbarea de baze: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_4 = \mathbf{e}_2$. In baza $\mathcal{B}'$ avem: $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -3$, $\Delta_3 = -1$, $\Delta_4 = 4$.

Cum $G' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, rezultă: $C' = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

4.3.8 Utilizând metoda lui Jacobi să se determine expresiile canonice ale următoarelor forme pătratice, date prin matricele lor în baza canonică:

$$1)\ G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\ 2)\ G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\ 3)\ G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.3.9 Se dă forma pătratică $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, a cărei matrice în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ este

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Să se găsească matricea G' a formei pătratice h într-o bază $\mathcal{B}'$ din $\mathbf{R}^3$ formată din vectori proprii ai transformării liniare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, a cărei matrice în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ este $A = G$.

R: Ecuaţia caracteristică este $\lambda^3 - 15\lambda^2 + 66\lambda - 80 = 0$, iar valorile proprii: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 8$. Deci, de exemplu, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, în care:

$$\mathbf{e}'_1 = (2, 1, 2)\,,\ \mathbf{e}'_2 = (1, 2, -2)\,,\ \mathbf{e}'_3 = (-2, 2, 1)\,.$$

In această bază

$$G' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 72 \end{bmatrix}.$$

4.4 Forme pătratice reale

4.4.1 Să se determine rangul r, indicii de inerţie p şi q şi să se precizeze natura formelor pătratice:

1) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.
2) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2$.
3) $h(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
4) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

R: 1) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2$, $r = 3$, $p = 3$, $q = 0$, pozitiv definită.
2) $h(\mathbf{x}) = (x_1 + x_3)^2 + 2x_2^2$, $r = 2$, $p = 2$, $q = 0$, pozitiv semidefinită.
3) $\Delta_1 = 7 > 0$, $\Delta_2 = 48 > 0$, $\Delta_3 = 432 > 0$, $r = 3$, $p = 3$, $q = 0$, pozitiv definită.
4) $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -3$, $\Delta_3 = -27$, $r = 3$, $p = 2$, $q = 1$, nedefinită.

4.4.2 Să se determine rangul r, indicii de inerţie p şi q şi să se precizeze natura formelor pătratice:

1) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 8x_2x_4 + 4x_3x_4$.
2) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.
3) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$.

R: Avem:

$$1)\ h(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4)^2 - 3x_2^2 + x_4^2,$$

cu $r = 3$, $p = 2$, $q = 1$, nedefinită.

$$2)\ h(\mathbf{x}) = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)^2 +$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4\right)^2 + \frac{5}{8}x_4^2,$$

cu $r = p = 4$, $q = 0$, pozitiv definită.

$$3)\ h(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - \frac{1}{3}(-3x_4 - 3x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{3}(3x_2 + x_3)^2,$$

cu $r = 3$, $p = 2$, $q = 1$, nedefinită.

4.4.3 Se consideră forma pătratică $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definită prin:

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$$

în care $g_{ij} = \int_a^b f_i(t) f_j(t)\, dt$, $i, j = \overline{1, n}$, cu f_i funcţii continue şi liniar independente pe $[a, b]$. Să se arate că h este pozitiv definită.

R: Fie $\mathcal{B}'$ o bază în care h are expresia canonică $h(\mathbf{x}) = \sum\limits_{l=1}^{n} g'_{ll}(x'_\ell)^2$. Dacă trecerea de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ se face prin $\mathbf{e}' = \mathbf{e}\, C$, deoarece $G' = {}^t C\, G\, C$, avem

$$g'_{ll} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i\ell} g_{ij} c_{j\ell} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i\ell} \cdot \int_a^b f_i(t) f_j(t)\, dt \cdot c_{j\ell} =$$

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i\ell} f_i(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_{j\ell} f_j(t)\right) dt$$

sau, dacă notăm $f'_\ell(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{i\ell} f_i(t)$, găsim $g'_{\ell\ell} = \int_a^b \left(f'_\ell(t)\right)^2 dt > 0$, deoarece f'_ℓ sunt continue şi liniar independente, deci neidentic nule pe $[a, b]$.

4.4.4 Să se arate că forma pătratică $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ a cărei matrice în baza canonică din $\mathbf{R}^n$ este $G = {}^tA\,A$, în care A este o matrice pătratică de ordinul n reală, nesingulară, este pozitiv definită şi reciproc, dacă h este pozitiv definită, atunci există $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, nesingulară, a.î. $G = {}^tA\,A$.

R: Avem: $h(\mathbf{x}) = {}^tX\,G\,X = {}^tX\,({}^tA\,A)\,X = {}^t(A\,X)(\,A\,X)$. Cum $D(A) \neq 0$, putem efectua în $\mathbf{R}^n$ schimbarea de baze $\mathbf{e}' = \mathbf{e}\,C$ cu $C = A^{-1}$. Atunci $X' = AX$ este matricea coordonatelor vectorului $\mathbf{x}$ în baza $\mathcal{B}'$ şi deci

$$h(\mathbf{x}) = {}^tX' \cdot X' = \sum_{i=1}^{n} (x_i')^2,$$

de unde deducem că h este pozitiv definită.

Reciproc, dacă h este pozitiv definită, există matricea $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, nesingulară, a.î. în baza $\mathbf{e}' = \mathbf{e}C$, h să aibă expresia normală, adică $G' = I_n$. Cum $G' = {}^tC\,G\,C$, rezultă că ${}^tC\,G\,C = I_n$ sau $G = {}^tC^{-1}\,C^{-1}$. Luând $A = C^{-1}$, obţinem $G = {}^tA\,A$.

CAPITOLUL 5

SPAŢII EUCLIDIENE

5.1 Spaţiu euclidian. Produs scalar, normă, distanţă, unghi

5.1.1 Să se arate că în orice spaţiu vectorial n-dimensional V, aplicaţia

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$ este un produs scalar.

R: Aplicaţia g este o formă biliniară simetrică a cărei formă pătratică asociată este pozitiv definită.

5.1.2 Să se verifice care dintre următoarele aplicaţii $g : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este un produs scalar pe $\mathbf{R}^2$:

1) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$.
2) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2$.
3) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$.

R: 1) g este simetrică şi $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$, deci forma pătratică h asociată este pozitiv definită. 2) Nu, deoarece g nu este pozitiv definită. 3) Nu, deoarece nu este o formă biliniară.

5.1.3 Se dă forma biliniară $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_2 y_3 + 2x_3 y_2$. Să se verifice dacă este un produs scalar pe $\mathbf{R}^3$.

R: Nu, deoarece nu este simetrică.

5.1.4 Se dă forma biliniară reală

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 4x_3 y_3 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2(x_1 y_3 + x_3 y_1) - \frac{3}{2}(x_2 y_3 + x_3 y_2).$$

1) Să se verifice că este un produs scalar pe $\mathbf{R}^3$.

2) Să se găsească o bază în $\mathbf{R}^3$ în care forma pătratică asociată are expresia normală.

R: 1) G este simetrică. Forma pătratică asociată este:

$$h(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3,$$

adică $h(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(2x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + \frac{2}{5}(\frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{19}{10}x_3^2$ şi deci este pozitiv definită.

5.1.5 Să se determine un produs scalar pe $\mathbf{R}^n$ în raport cu care baza

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\},$$

cu:

$$\mathbf{e}'_1 = (0, 1, 1, \dots, 1),\ \mathbf{e}'_2 = (1, 0, 1, \dots, 1),\ \dots,\ \mathbf{e}'_n = (1, 1, \dots, 0),\ n > 1,$$

să fie ortonormată.

R: Fie G matricea în baza canonică din $\mathbf{R}^n$ a formei biliniare care determină produsul scalar căutat. Dacă C este matricea de trecere de la baza canonică la baza $\mathcal{B}'$, din $g'_{ij} = g(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \delta_{ij}$ avem: ${}^tCGC = I_n$, rezultă $G = {}^t C^{-1}C^{-1}$,

$$C^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2-n \end{bmatrix},$$

obţinem astfel:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{3 - 3n + n^2}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \frac{2-n}{(n-1)^2}\sum_{i \neq j} x_iy_j.$$

5.1.6 Să se arate că forma biliniară $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \frac{1}{2}\sum_{1 \le i < j \le n}(x_iy_j + x_jy_i)$$

este un produs scalar pe $\mathbf{R}^n$.

R: G este simetrică şi $\Delta_k = \frac{k+1}{2^k} > 0$, $k = \overline{1, n}$.

5.1.7 In spaţiul $C[a, b]$, al funcţiilor reale continue pe $[a, b]$, se consideră aplicaţia

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad \forall\, f, g \in C[a, b].$$

1) Să se arate că plicaţia dată este un produs scalar pe $C[a, b]$.
2) Să se verifice inegalitatea

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

R: 1) Evident, $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$. Apoi

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0 \text{ şi } \langle f, f\rangle = 0 \text{ d.d. } f = 0.$$

2) Se aplică inegalitatea lui Cauchy-Schwarz, sau direct din

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,dx \geq 0,\quad \forall\,\lambda \in \mathbf{R}.$$

5.1.8 Fie $g : \mathcal{M}_n^s(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n^s(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, definită prin $g(A, B) = \mathrm{Tr}\,(AB)$. Să se arate că:

1) g este un produs scalar.

2) $(\mathrm{Tr}\,(AB))^2 \leq \mathrm{Tr}\,(A^2) \cdot \mathrm{Tr}\,(B^2)$.

R: 1) Dacă $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$, atunci $\mathrm{Tr}\,(AB) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$ şi $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$,

$$\mathrm{Tr}\,A^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0 \text{ şi } \mathrm{Tr}\,A^2 = 0 \text{ d.d. } A = 0.$$

2) Se aplică inegalitatea lui Cauchy-Schwarz.

5.1.9 In spaţiul $\mathbf{R}_n[X]$, al polinoamelor de grad cel mult n, se consideră aplicaţia

$$(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k,$$

pentru orice $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots a_nX^n$, $Q(X) = b_0 + b_1X + \cdots b_nX^n$.

1) Să se arate că este un produs scalar pe $\mathbf{R}_n[X]$.

2) Să se determine unghiurile dintre perechile de polinoame: (P, Q), (P, R) din $\mathbf{R}_2[X]$, unde

$$P(X) = 3 - 4X + 12X^2,\ Q(X) = -4 + 3X + 2X^2,\ R(X) = 4 + 12X + 3X^2.$$

3) In $\mathbf{R}_2[X]$ se dau polinoamele:

$$\begin{array}{ll} P_1(X) = 1 + 2X + 3X^2, & P_2(X) = 1 + 2X - X^2, \\ P_3(X) = 5 + 2X + 3X^2, & P_4(X) = 2 + 5X + 3X^2. \end{array}$$

Să se găsească un polinom $P(X) \in \mathbf{R}_2[X]$ echidistant celor patru polinoame şi să se calculeze distanţa de la $P(X)$ la aceste polinoame.

R: 2) $\cos(P, Q) = 0$, $\cos(P, R) = 0$. 3) Din:

$$d\,(P_1, P) = d\,(P_2, P) = d\,(P_3, P) = d\,(P_4, P)$$

se obţine $P(X) = 3 + 3X + X^2$, $d = 3$.

5.1.10 Să se arate că polinoamele $E_i(X) = \dfrac{1}{i!}X^i$, $i = \overline{0,n}$, formează o bază ortonormată în raport cu produsul scalar

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} (i!)^2 a_i b_i$$

pentru orice $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots a_nX^n$, $Q(X) = b_0 + b_1X + \cdots b_nX^n$ din $\mathbf{R}_n[X]$.

5.1.11 Să se arate că în orice spaţiu enclidian, avem:

1) Dacă $\mathbf{u} \perp (\mathbf{v}+\mathbf{w})$ şi $\mathbf{v} \perp (\mathbf{w}-\mathbf{u})$, atunci $\mathbf{w} \perp (\mathbf{u}+\mathbf{v})$.

2) $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}||$ d.d. $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

3) Dacă $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}|| = 1$, atunci egalitatea $||\alpha\mathbf{u}+(1-\alpha)\,\mathbf{v}|| = 1$ are loc d.d. $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$.

R: 1) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = 0$ şi $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{u}) = 0$, implică $\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})$.

2) $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}||$ d.d. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = 0$.

3) Egalitatea $||\alpha\mathbf{u}+(1-\alpha)\,\mathbf{v}|| = 1$ este echivalentă cu $\alpha\,(\alpha-1)\,(2-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = 0$, cu $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq 1$.

5.1.12 Să se arate că în orice spaţiu enclidian, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

$$(i)\ \ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0,\ \ (ii)\ \ ||\mathbf{u}+\mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}-\mathbf{v}||,\ \ (iii)\ \ ||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2.$$

5.1.13 Să se calculeze unghiul şi distanţa dintre vectorii $\mathbf{u} = (1,-2,3)$, $\mathbf{v} = (0,3,2)$ din $\mathbf{R}^3$.

R: $\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$, $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 3\sqrt{3}$.

5.1.14 Se dau vectorii $\mathbf{u}_1 = \dfrac{1}{3}(2,1,2)$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{1}{3}(1,2,-2)$. Să se arate că sistemul $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ este ortonormat şi să se completeze până la o bază ortonormată în $\mathbf{R}^3$.

R: $\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 = 0$, $||\mathbf{u}_1|| = ||\mathbf{u}_2|| = 1$, $\mathbf{u}_3 = \pm\dfrac{1}{3}(2,-2,-1)$.

5.2 Baze ortonormate

5.2.1 Aplicând procedeul lui Gram-Schmidt să se ortonormeze baza

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\} \subset \mathbf{R}^4,$$

unde

$$\mathbf{e}_1 = (1,1,0,0),\ \mathbf{e}_2 = (2,0,1,1),\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1,-1),\ \mathbf{e}_4 = (1,-1,-1,1).$$

R: Se obţine: $\lambda_{12} = 1$, $\lambda_{13} = \lambda_{23} = 0$, $\lambda_{14} = 0$, $\lambda_{24} = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_{34} = -1$ şi deci baza ortonormată:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),\ \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,1),$$

$$\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1),\ \mathbf{e}'_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,-1).$$

5.2.2 Utilizând procedeul lui Gram-Schmidt, să se ortonormeze baza

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbf{R}^3,$$

unde:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \mathbf{e}_1 = (2,1,2), & \mathbf{e}_2 = (3,3,0), & \mathbf{e}_3 = (1,-1,-5). \\ 2)\ \mathbf{e}_1 = (1,0,0), & \mathbf{e}_2 = (0,1,-1), & \mathbf{e}_3 = (1,1,1). \\ 3)\ \mathbf{e}_1 = (0,0,1), & \mathbf{e}_2 = (0,1,1), & \mathbf{e}_3 = (1,1,1). \end{array}$$

R: 1) $\mathbf{e}'_1 = \dfrac{1}{3}(2,1,2)$, $\mathbf{e}'_2 = \dfrac{1}{3}(1,2,-2)$, $\mathbf{e}'_3 = \dfrac{1}{3}(2,-2,-1)$.
2) $\mathbf{e}'_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$, $\mathbf{e}'_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

5.2.3 Utilizând procedeul lui Gram-Schmidt, să se ortonormeze baza

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\} \subset \mathbf{R}^4,$$

unde:

$$\mathbf{e}_1 = (0,1,1,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,4,0,1),\ \mathbf{e}_3 = (1,-1,1,0),\ \mathbf{e}_4 = (1,3,0,1).$$

R: Se obţine:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0),\ \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{3}(0,2,-2,1),$$

$$\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{3\sqrt{11}}(9,-1,1,4),\ \mathbf{e}'_4 = \frac{1}{\sqrt{22}}(2,1,-1,-4).$$

5.2.4 Fie $\mathbf{R}_n[X]$ spaţiul euclidian al polinoamelor definite pe intervalul $[-1,1]$, dotat cu produsul scalar

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)\,dX$$

şi baza $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$. Se cere:
1) Să se calculeze normele vectorilor bazei $\mathcal{B}$.
2) Să se calculeze unghiul dintre doi vectori ai bazei $\mathcal{B}$.
3) Utilizând procedeul lui Gram-Schmidt, să se ortonormeze baza $\mathcal{B}$.

R: 1) Deoarece $\|P\| = \sqrt{\langle P, P\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} P^2(X)\,dX}$, rezultă

$$||X^k|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} X^{2k} dX} = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}, \quad k = \overline{0, n}.$$

2) $\langle X^i, X^j\rangle = \int_{-1}^{1} X^{i+j} dX = \dfrac{1 + (-1)^{i+j}}{i+j+1}$.

3) Fie $E_k(X) = X^k$. Se determină mai întâi sistemul ortogonal

$$S_{n+1} = \{F_k, k = \overline{0, n}\},$$

cu:

$$F_k = E_k - \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_{jk} F_j, \text{ unde } \lambda_{ik} = \frac{\langle F_i, E_k\rangle}{||F_i||^2}, \ i = \overline{0, k-1}:$$

$$F_0(X) = 1,\ F_1(X) = X,\ F_2(X) = X^2 - \frac{1}{3},\ F_3(X) = X^3 - \frac{3}{5}X,\ \ldots$$

Se verifică prin inducţie că F_k sunt (polinoamele lui Legendre) date de

$$F_k(X) = \frac{k!}{(2k)!} \frac{d^k}{dx^k}\left[(X^2 - 1)^k\right], \quad k = \overline{0, n}.$$

Cu $||F_0|| = \sqrt{2}$, $||F_1|| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $||F_2|| = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}$, $||F_3|| = \dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{2}{7}}$, ...

5.2.5 Fie $\mathbf{R}^3$ dotat cu produsul scalar

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le 3} (x_i y_j + x_j y_i).$$

Utilizând procedeul lui Gram-Schmidt, să se ortonormeze baza $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ din $\mathbf{R}^3$, unde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0),\ \mathbf{e}_1 = (0, 1, 0),\ \mathbf{e}_1 = (0, 0, 1).$$

R: Se obţine: $\mathbf{e}_1' = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1, 2, 0)$, $\mathbf{e}_1' = \dfrac{1}{3}(-2, 1, 3)$.

5.3 Transformări liniare ortogonale

5.3.1 Să se arate că transformările liniare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definite în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ prin:

$$1)\ \begin{cases} T(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), \\ T(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3), \\ T(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{3}(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3), \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} T(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{7}(-3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3), \\ T(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{7}(-2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3), \\ T(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{7}(6\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3), \end{cases}$$

sunt ortogonale şi să se determine inversele lor.

R: 1) ${}^tA \cdot A = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = I_3,\ A^{-1} = {}^tA = A$, deci $T^{-1} = T$.

2) ${}^tA \cdot A = I_3,\ A^{-1} = {}^tA$. Deci: $\begin{cases} T^{-1}(\mathbf{e}_1) = \dfrac{1}{7}(-3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3), \\ T^{-1}(\mathbf{e}_2) = \dfrac{1}{7}(6\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3), \\ T^{-1}(\mathbf{e}_3) = \dfrac{1}{7}(2\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3). \end{cases}$

5.3.2 Să se arate că transformarea liniară $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$, definită prin:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ y_2 = \dfrac{1}{6}(3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4), \\ y_3 = \dfrac{1}{6}(3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4), \\ y_4 = \dfrac{1}{6}(3x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4), \end{cases}$$

este ortogonală şi să se determine inversa sa.

R: ${}^tA \cdot A = I_4$, $A^{-1} = A$, deci $T^{-1} = T$.

5.3.3 Să se arate că transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$, definită prin

$$y_1 = x_1,\ y_2 = \frac{1}{2}(x_2\sqrt{3} + x_3),\ y_3 = \frac{1}{2}(x_2 - x_3\sqrt{3})$$

este ortogonală şi să se determine inversa sa.

R: ${}^tA \cdot A = I_3$, $A^{-1} = A$, deci $T^{-1} = T$.

5.4 Transformări liniare simetrice

5.4.1 Se dau transformările liniare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$, definite prin:

$$1)\ \begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}(2x_1 + x_2 + x_3), \\ y_2 = \dfrac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + x_3), \\ y_3 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + 2x_3), \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = \dfrac{1}{2}(x_2\sqrt{3} + x_3), \\ y_3 = \dfrac{1}{2}(x_2 - x_3\sqrt{3}). \end{cases}$$

Să se arate că sunt simetrice, să se găsească valorile sale proprii şi vectorii proprii corespunzători şi să se găsească baze ortonormate în $\mathbf{R}^3$ în care matricele transformărilor T au forma diagonală.

R: 1) Ecuaţia caracteristică: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + \dfrac{9}{4}\lambda - \dfrac{1}{2} = 0$, valorile proprii: 2, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, vectorii proprii: $(1,1,1)$, $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$, baza ortonormată:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2).$$

2) Ecuaţia caracteristică: $(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, valorile proprii: 1, 1, -1, vectorii proprii: $(1,0,0)$, $(0,2+\sqrt{3},1)$, $(0,1,-2-\sqrt{3})$, cu norma $\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

5.4.2 Să se găsească o bază ortonormată în $\mathbf{R}^4$ în care matricea transformării liniare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, definită în baza canonică prin

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_4, T(\mathbf{e}_3) = -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, T(\mathbf{e}_4) = -3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

să aibă forma diagonală.

R: Ecuaţia caracteristică: $\lambda^4 - 20\lambda^2 + 64 = 0$, valorile proprii: -4, 2, -2, 4, baza ortonormată:

$$\frac{1}{2}(1,-1,1,-1),\ \frac{1}{2}(-1,1,1,-1),\ \frac{1}{2}(1,1,1,1),\ \frac{1}{2}(-1,-1,1,1).$$

5.4.3 Se dă transformarea liniară $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ a cărei matrice în baza canonică din $\mathbf{R}^4$ este

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

şi matricea

$$C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că matricea C este ortogonală şi să se verifice că matricea A' a transformării T în baza $\mathcal{B}'$, obţinută din baza $\mathcal{B}$ prin schimbarea de baze $\mathbf{e}' = \mathbf{e}\,C$ are forma diagonală.

R: Avem că ${}^tC \cdot C = I_n$ şi $A' = C^{-1}A\,C = {}^tC\,A\,C = \operatorname{diag}(1,1,1,2)$.

5.4.4 Fie $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, transformarea liniară simetrică a cărei matrice în baza canonică din $\mathbf{R}^4$ este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine valorile proprii, subspaţiile proprii şi o bază ortonormată în care matricea transformării T să fie diagonală.

R: Ecuaţia caracteristică este $(\lambda^2-4)^2=0$, deci $\lambda_1=2$, cu $m_1=2$ şi $\lambda_2=-2$, cu $m_2=2$.

O bază în $S(\lambda_1)$ este formată din vectorii proprii

$$\mathbf{f}_1=(1,1,0,0),\mathbf{f}_2=(2,0,1,1).$$

Din această bază, prin procedeul de ortonormare a lui Gram-Schmidt, se obţine baza ortonormată $\mathcal{B}(\lambda_1)=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\}$, unde

$$\mathbf{e}'_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),\mathbf{e}'_2=\frac{1}{2}(1,-1,1,1).$$

O bază în $S(\lambda_2)$ este formată din vectorii proprii

$$\mathbf{f}_3=(0,0,1,-1),\mathbf{f}_4=(1,-1,-1,-1).$$

Din această bază obţinem, prin ortonormare, baza $\mathcal{B}(\lambda_2)=\{\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_4\}$, unde

$$\mathbf{e}'_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1),\mathbf{e}'_4=\frac{1}{2}(1,-1,-1,-1).$$

In raport cu baza ortonormată $\mathcal{B}'=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_4\}$, matricea transformării liniare T are forma diagonală $A'=\operatorname{diag}\{2,2,-2,-2\}$.

5.4.5 Fie $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ o transformare liniară. Transformarea liniară

$$e^T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,$$

definită prin:

$$e^T=i+\frac{1}{1!}T+\frac{1}{2!}T^2+\cdots+\frac{1}{n!}T^n+\cdots$$

se numeşte exponenţiala transformării T.

Să se calculeze e^T pentru transformările liniare simetrice $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ ale căror matrice în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ sunt:

$$1)\ A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}.\ 2)\ A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

R: Se constată imediat că dacă $T(\mathbf{e})=\mathbf{e}\cdot A$, atunci $e^{T(\mathbf{e})}=\mathbf{e}\cdot e^A$, în care:

$$e^A=I_n+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^n+\cdots$$

Dacă în baza ortonormată $\mathcal{B}'$ matricea transformării T are forma diagonală

$$A'=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix},\ \text{atunci}\ e^{A'}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1}&0&\cdots&0\\0&e^{\lambda_2}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&e^{\lambda_n}\end{bmatrix}$$

şi $e^A = C \cdot e^{A'} \cdot C^{-1}$, C fiind matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.

1) Ecuaţia caracteristică este $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$, cu valorile proprii: 2, 3, 6. In baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, unde:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\right), \ \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\right), \ \mathbf{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\right),$$

matricea transformării T este $A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ şi deci $e^{A'} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^6 \end{bmatrix}$. In concluzie:

$$e^A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3e^2 + 2e^3 + e^6 & 2e^3 - 2e^6 & -3e^2 + 2e^3 + e^6 \\ 2e^3 - 2e^6 & 2e^3 + 4e^6 & 2e^3 - 2e^6 \\ -3e^2 + 2e^3 + e^6 & 2e^3 - 2e^6 & 3e^2 + 2e^3 + e^6 \end{bmatrix}.$$

5.5 Forme pătratice pe spaţii euclidiene

5.5.1 Să se aducă la expresia canonică, printr-o schimbare ortogonală de baze, forma pătratică $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, care în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ are expresia

$$h(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

R: Matricea formei pătratice h în baza canonică din R^3 este

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Asociem formei pătratice h transformarea liniară simetrică $T : R^3 \to R^3$, prin $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot T(\mathbf{x})$. Ecuaţia caracteristică este $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 1$. Vectorii proprii corespunzători

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2), \ \ \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{3}(2, -2, 1), \ \ \mathbf{e}'_3 = \frac{1}{3}(2, 1, -2).$$

In baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ forma pătratică h are expresia canonică

$$h(\mathbf{x}) = -2(x'_1)^2 + 4(x'_2)^2 + (x'_3)^2.$$

5.5.2 Să se aducă la expresia canonică, printr-o schimbare ortogonală de baze, formele pătratice $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, definite prin:

1) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2$.
2) $h(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
3) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

R: 1) Ecuaţia caracteristică este: $\lambda\left(\lambda - 2\right)^2 = 0$, iar baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, cu:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \ \mathbf{e}'_2 = (0, 1, 0), \ \mathbf{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1).$$

Expresia canonică fiind: $h(\mathbf{x}) = 2\left((x_2')' + (x_3')^2\right)$.

2) Ecuaţia caracteristică este: $\lambda^3 - 24\lambda^2 + 180\lambda - 432 = 0$, iar baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, cu:

$$\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),\ \mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1),\ \mathbf{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2).$$

Expresia canonică fiind: $h(\mathbf{x}) = 6\left((x_1')' + (x_2')^2\right) + 12\,(x_3')^2$.

3) Ecuaţia caracteristică este: $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$, iar baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, cu:

$$\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1),\ \mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1),\ \mathbf{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Expresia canonică fiind: $h(\mathbf{x}) = 3\left((x_1')' + (x_2')^2\right) - 3\,(x_3')^2$.

5.5.3 Să se găsească o bază ortonormată în $\mathbf{R}^3$ în care următoarele forme pătratice au expresia canonică:

1) $h(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
2) $h(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.
3) $h(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

R: 1) Ecuaţia caracteristică: $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$, valorile proprii: $2, -1, -1$, vectorii proprii: $(1, 1, 1)$, $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$. Baza ortonormată:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1).$$

2) Ecuaţia caracteristică: $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 98 = 0$, valorile proprii: $-2, 7, 7$, vectorii proprii: $(1, \frac{1}{2}, 1)$, $(0, -2, 1)$, $(1, -2, 0)$, baza ortonormată:

$$\frac{2}{3}(1, \frac{1}{2}, 1),\ \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1),\ \frac{1}{3\sqrt{5}}(5, -2, -4).$$

3) Ecuaţia caracteristică: $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, valorile proprii: $1, -2, 4$, vectorii proprii: $(2, 1, -2)$, $(1, 2, 2)$, $(2, -2, 1)$, baza ortonormată:

$$\frac{1}{3}(2, 1, -2),\ \frac{1}{3}(1, 2, 2),\ \frac{1}{3}(2, -2, 1).$$

5.5.4 Să se găsească o bază ortonormată în $\mathbf{R}^4$ în care următoarele forme pătratice au expresia canonică:

1) $h(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$.
2) $h(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_3x_4$.

R: 1) Ecuaţia caracteristică: $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 14\lambda^2 + 8\lambda - 15 = 0$, valorile proprii: 5, 1, 3, -1, vectorii proprii:

$$(1,-1,-1,1),\ (1,1,1,1),\ (-1,1,-1,1),\ (-1,-1,1,1),$$

cu norma 2.

2) Ecuaţia caracteristică: $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$, valorile proprii: 1, 1, -1, -1, vectorii proprii:

$$(1,1,0,0),\ (0,0,1,1),\ (-1,1,0,0),\ (0,0,-1,1),$$

cu norma $\sqrt{2}$.

5.5.5 Fie $L_2^s(E)$ mulţimea transformărilor liniare simetrice pe E.

1) Să se cerceteze dacă $T_1, T_2 \in L_2^s(E)$ implică $T_1 \circ T_2 \in L_2^s(E)$.

2) Dacă $T_1, T_2 \in L_2^s(E)$, să se arate că $T_1 \circ T_2 + T_2 \circ T_1 \in L_2^s(E)$.

3) Dacă $T \in L_2^s(E)$ şi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}) = 0$, pentru orice $\mathbf{v} \in E$, să se demonstreze că $T = 0$.

R: 1) Dacă $T_1 \circ T_2 \in L_2^s(E)$, atunci

$$(T_1 \circ T_2)(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (T_1 \circ T_2)(\mathbf{v}).$$

Dar cum $T_1, T_2 \in L_2^s(E)$,

$$(T_1 \circ T_2)(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = T_1(T_2(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} = T_2(\mathbf{u}) \cdot T_1(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot T_2(T_1(\mathbf{v})) = \mathbf{u} \cdot (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}),$$

deci va trebui să avem $\mathbf{u} \cdot (T_1 \circ T_2)(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v})$, pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$, adică $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$, ceea ce, în general, nu este adevărat.

2) Se arată că

$$[(T_1 \circ T_2) + (T_2 \circ T_1)](\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot [(T_1 \circ T_2) + (T_2 \circ T_1)](\mathbf{v}).$$

3) Din $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0$, pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ şi simetria lui T, rezultă $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}) = 0$, pentru orice $\mathbf{u} \in E$, de unde $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = 0$, pentru orice $\mathbf{v} \in E$, adică $T = 0$.

CAPITOLUL 6

ALGEBRĂ VECTORIALĂ

6.1 Noţiunea de vector liber. Operaţii cu vectori

6.1.1 Fie triunghiul OAB construit pe reprezentanţii prin punctul O ai vectorilor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ şi $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ ca laturi. Să se exprime cea de-a treia latură şi medianele triunghiului în funcţie de $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$.

6.1.2 In hexagonul regulat $ABCDEF$ se dă $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v}$. Să se exprime în funcţie de $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ celelalte laturi şi diagonalele hexagonului.

6.1.3 Fie tetraedrul $OABC$ construit pe reprezentanţii prin punctul O ai vectorilor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ şi $\mathbf{w} = \overrightarrow{OC}$ ca muchii. Să se exprime în funcţie de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$, celelalte muchii ale tetraedrului, mediana $\overrightarrow{CM}$ a feţei ABC şi vectorul $\overrightarrow{OG}$, unde G este centrul de greutate al feţei ABC.

6.1.4 Pe vectorii $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{w}$, ca muchii, se construieşte paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$. Să se exprime în funcţie de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ celelalte muchii, diagonalele feţelor şi diagonalele paralelipipedului.

6.1.5 Se dă piramida $VABCD$, în care baza $ABCD$ este un paralelogram şi fie O intersecţia diagonalelor acestuia. Să se arate că

$$\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC} + \overrightarrow{VD} = 4\overrightarrow{VO}.$$

6.1.6 Fie punctele O, A, B necoliniare, $a \neq 0$ şi $\overrightarrow{OA'} = a\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB'} = a\overrightarrow{OB}$. Să se arate că $\overrightarrow{A'B'} = a\overrightarrow{AB}$.

R: Din $||\overrightarrow{OA'}|| = |a|\,||\overrightarrow{OA}||$ şi $||\overrightarrow{OB'}|| = |a|\,||\overrightarrow{OB}||$ rezultă că triunghiurile OAB şi $OA'B'$ sunt asemenea şi deci $||\overrightarrow{A'B'}|| = |a|\,||\overrightarrow{AB}||$ şi $\overrightarrow{A'B'} \,||\, \overrightarrow{AB}$. Dacă $a > 0$, cei doi vectori au acelaşi sens, iar dacă $a < 0$ au sensuri contrare. In concluzie $\overrightarrow{A'B'} = a\overrightarrow{AB}$ (omotetie).

6.1.7 Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$ şi vectorii $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$: $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$.

R: Dacă a este egal cu zero sau dacă cel puţin unul din vectorii $\mathbf{u}$ sau $\mathbf{v}$ este vectorul nul, egalitatea este evidentă. Analizăm în continuare cazul când $a \neq 0$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Din punctul arbitrar A construim vectorul $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, iar din B, vectorul $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v}$. După regula triunghiului $\overrightarrow{AC} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$. Fie A', B', C' imaginile punctelor A, B, C prin omotetia de centru O şi raport a. Atunci: $\overrightarrow{A'B'} = a\overrightarrow{AB} = a\mathbf{u}$, $\overrightarrow{B'C'} = a\overrightarrow{BC} = a\mathbf{v}$, $\overrightarrow{A'C'} = a\overrightarrow{AC} = a(\mathbf{u}+\mathbf{v})$. Dar $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$, de unde $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$.

6.1.8 Să se arate că oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$ şi vectorul $\mathbf{u} \in V$: $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$.

R: Dacă cel puţin unul din numerele a sau b este egal cu zero sau $a+b=0$ sau dacă $\mathbf{u}$ este vectorul nul, egalitatea este evidentă. Analizăm în continuare cazul când $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Sunt posibile două cazuri: $ab > 0$ sau $ab < 0$.

a). Dacă $ab > 0$, din punctul arbitrar A construim vectorii coliniari, având acelaşi sens, $\overrightarrow{AB} = a\mathbf{u}$ şi $\overrightarrow{BC} = b\mathbf{u}$. Deci, $||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{AB}|| + ||\overrightarrow{BC}|| = |a|\,||\mathbf{u}|| + |b|\,||\mathbf{u}|| = |a+b|\,||\mathbf{u}||$. Vectorii $\overrightarrow{AC}$ şi $\mathbf{u}$ au acelaşi sens dacă a, $b > 0$ şi sensuri opuse dacă a, $b < 0$. In concluzie $\overrightarrow{AC} = (a+b)\mathbf{u}$. Pe de altă parte, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, de unde $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$.

b). Dacă $ab < 0$, sau $a+b=0$ şi atunci $(a+b)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $a\mathbf{u}+b\mathbf{u} = a\mathbf{u} + (-a)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, sau $a+b \neq 0$ şi cum a şi b au semne contrare, $-a$ şi $a+b$ sau $-b$ şi $a+b$ au acelaşi semn. Fie $-a$ şi $a+b$ de acelaşi semn. Atunci $(-a)\mathbf{u} + (a+b)\mathbf{u} = ((-a)+(a+b))\mathbf{u} = b\mathbf{u}$, de unde $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$.

6.2 Vectori coliniari şi vectori coplanari. Baze

6.2.1 Fie $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ trei vectori necoplanari. Să se cerceteze dacă vectorii:

$$\begin{aligned}
1)\ \mathbf{u}' &= 2\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w},\ \mathbf{v}' = -\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - \mathbf{w},\ \mathbf{w}' = -\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w}. \\
2)\ \mathbf{u}' &= \mathbf{w},\ \mathbf{v}' = \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w},\ \mathbf{w}' = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}. \\
3)\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \mathbf{w}' = -\mathbf{u} + \mathbf{w}. \\
4)\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{3w},\ \mathbf{v}' = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 4\mathbf{w},\ \mathbf{w}' = 3\mathbf{u} + \mathbf{4v} + 5\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

sunt coplanari şi în caz afirmativ să se găsească relaţia dintre ei.

R: 1) $r = 2$, coplanari şi: $\mathbf{u}'+\mathbf{v}'+\mathbf{w}' = \mathbf{0}$, 2) $r = 2$, coplanari şi: $2\mathbf{u}'+\mathbf{v}'-\mathbf{w}' = \mathbf{0}$, 3) $r = 3$, necoplanari. 4) $r = 2$, coplanari şi: $\mathbf{u}' - 2\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = \mathbf{0}$.

6.2.2 Se dau vectorii: $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3$. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ a.î. vectorii să fie coplanari şi în acest caz să se descompună vectorul $\mathbf{u}$ după vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$.

6.2.3 Să se descompună vectorul $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ după vectorii necoplanari

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3' = 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3.$$

R: $\det C = 2$, $\mathbf{u} = 4\mathbf{e}_1' - 3\mathbf{e}_2' - 3\mathbf{e}_3'$.

6.2.4 Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ o bază în V. Să se găsească relaţia liniară dintre vectorii

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3,\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_3.$$

R: $r = 3$, $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$.

6.3 Proiecţia unui vector. Produsul scalar

6.3.1 Fie $\mathbf{u}$ un vector nenul. Să se arate că pentru orice vectori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}$ şi orice număr real a, au loc egalităţile:
1) $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = \mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\mathrm{v}_1 + \mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\mathrm{v}_2$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}(\mathrm{av}) = \mathrm{a}\,\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\mathrm{v}$;
2) $\mathrm{mrpr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathrm{mrpr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}_1 + \mathrm{mrpr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}_2$, $\mathrm{mrpr}_{\mathbf{u}}(a\mathbf{v}) = a\,\mathrm{mrpr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$.

R: 1) Fie $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}$ şi $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OA_2}$. Dacă A_1' şi A_2' sunt proiecţiile ortogonale ale punctelor A_1 şi A_2 pe dreapta D, atunci $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OA_1'}$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{A_1'A_2'}$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \overrightarrow{OA_2'}$. Dar $\overrightarrow{OA_1'} + \overrightarrow{A_1'A_2'} = \overrightarrow{OA_2'}$, de unde prima egalitate. Fie apoi $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$, $a\mathbf{v} = a\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ şi A', B' proiecţiile ortogonale ale punctelor A şi B pe dreapta D. Atunci $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \overrightarrow{OA'}$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}(a\mathbf{v}) = \overrightarrow{OB'}$. Dar $\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$ şi deci $\overrightarrow{OB'} = a\,\overrightarrow{OA'}$, de unde a doua egalitate.
2) Se ţine seama de faptul că $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = (\mathrm{mrpr}\,_{\mathbf{u}}\mathbf{v})\mathbf{u}_0$, unde $\mathbf{u}_0 = \dfrac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||}$.

6.3.2 Să se arate că oricare ar fi vectorii $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2$.

R: Ţinând seama de exerciţiul precedent, avem

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = ||\mathbf{u}||\,\mathrm{mrpr}\,_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = ||\mathbf{u}||\,(\mathrm{mrpr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}_1 + \mathrm{mrpr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2.$$

6.3.3 Fie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Să se arate că:
1) $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$ d.d. $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$;
2) $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$ d.d. $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ sunt coliniari şi au acelaşi sens;
3) $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| = |\,||\mathbf{u}|| - ||\mathbf{v}||\,|$ d.d. $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ sunt coliniari şi au sensuri opuse;
4) $||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$ d.d. $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ sunt coliniari şi au sensuri opuse;
5) Notând $||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| = a$, $||\mathbf{u}|| = b$, $||\mathbf{v}|| = c$ şi $A = (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$, să se arate că

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

R: Egalitatăţile sunt echivalente cu: 1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, 2) $\cos\alpha = 1$, 3) şi 4) $\cos\alpha = -1$.

6.3.4 Să se stabilească vectorial formula: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

R: Considerând cercul trigonometric şi doi vectori $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ care fac unghiurile α şi β cu axa Ox, avem $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(\alpha - \beta)$ şi $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{i}\cos\beta + \mathbf{j}\sin\beta$.

6.3.5 Să se calculeze:
1) Lungimea vectorului $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
2) Unghiul α dintre vectorii: $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

R: 1) $||\mathbf{u}|| = 11$. 2) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

6.3.6 Două forţe $\mathbf{F}_1$ şi $\mathbf{F}_2$ au acelaşi punct de aplicaţie, fac între ele un unghi de 120^0 şi au mărimile $||\mathbf{F}_1|| = 6$, $||\mathbf{F}_2|| = 4$. Să se găsească mărimea forţei rezultante $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.

R: $||\mathbf{R}|| = 2\sqrt{7}$.

6.3.7 Să se arate că vectorii $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ formează laturile unui triunghi şi să se determine unghiurile acestui triunghi.

R: $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$, $A = \dfrac{\pi}{2}$, $B = \arccos \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $C = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

6.3.8 Să se arate că vectorii $\mathbf{u} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$ şi $\mathbf{v}$ sunt ortogonali.

R: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

6.3.9 Dacă $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ şi $||\mathbf{a}|| = ||\mathbf{b}|| = ||\mathbf{c}|| = 3$, să se calculeze $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.

R: Se foloseşte identitatea:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = ||\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{b}||^2 + ||\mathbf{c}||^2 + 2\left(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}\right).$$

Se obţine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 4$.

6.3.10 Ştiind că $||\mathbf{a}|| = 2$, $||\mathbf{b}|| = 5$ şi $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{2\pi}{3}$, să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ a.î. vectorii $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ şi $\mathbf{v} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ să fie ortogonali.

R: Din $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, rezultă $\lambda = 40$.

6.3.11 Ştiind că $||\mathbf{a}|| = 1$, $||\mathbf{b}|| = 2$, $||\mathbf{c}|| = 3$, şi $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{\pi}{6}$, $(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}}) = \dfrac{\pi}{3}$, $(\widehat{\mathbf{c}, \mathbf{a}}) = \dfrac{\pi}{4}$, să se calculeze lungimea vectorului $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$.

R: $||\mathbf{u}|| = \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c})^2} = \sqrt{29 - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}$.

6.3.12 Ce unghi formează între ei vectorii unitari $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$, dacă vectorii $\mathbf{u} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ şi $\mathbf{v} = 5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ sunt ortogonali.

R: Din $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, rezultă $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

6.3.13 Se dau vectorii: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Să se găsească un vector $\mathbf{x}$ perpendicular pe $\mathbf{i}$ şi care îndeplineşte condiţiile: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = -5$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = 12$.

6.3.14 Fie $\mathbf{u}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ şi $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\sqrt{3}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Să se arate că $||\mathbf{u}_0|| = 1$ şi să se calculeze $\text{mrpr}_{\mathbf{u}_0}\mathbf{v}$ şi unghiurile pe care versorul $\mathbf{u}_0$ le face cu $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

R: $\text{mrpr}_{\mathbf{u}_0}\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} = -1$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

6.3.15 Să se arate că produsul scalar a doi vectori nu se modifică dacă la unul din vectori se adaugă un vector perpendicular pe celălalt.

6.4 Produsul vectorial

6.4.1 Fie $\mathbf{u}_0$ un vector unitar şi $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}_0$. Dacă $\overrightarrow{OA_0} = \mathbf{u}_0$ şi $\overrightarrow{OB} = \mathbf{v}$, atunci vectorul $\mathbf{u}_0 \times \mathbf{v} = \overrightarrow{OB'}$ se obţine printr-o rotaţie a vectorului $\mathbf{v}$ în jurul dreptei orientate OA_0 în sens direct de unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$.

R: Deoarece, $||\mathbf{u}_0 \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{v}||$ şi din $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}_0$ şi $\mathbf{u}_0 \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}_0$, rezultă că vectorii $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OB'}$ sunt situaţi într-un plan perpendicular pe dreapta OA_0, iar din $\mathbf{u}_0 \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$, rezultă că $(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_0 \times \mathbf{v}}) = \frac{\pi}{2}$. Rotaţia este în sens direct deoarece baza $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{v}, \mathbf{u}_0 \times \mathbf{v}\}$ este orientată pozitiv.

6.4.2 Oricare ar fi vectorii $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ şi pentru orice $a \in \mathbf{R}$, are loc egalitatea:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + a\mathbf{u}).$$

R: Dacă $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ sunt coliniari, egalitatea este evidentă. Dacă $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ sunt necoliniari, construim din punctul arbitrar O, vectorii $\overrightarrow{OA} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{OA'} = a\mathbf{u}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{v}$, $\overrightarrow{OB'} = \mathbf{v} + a\mathbf{u}$.

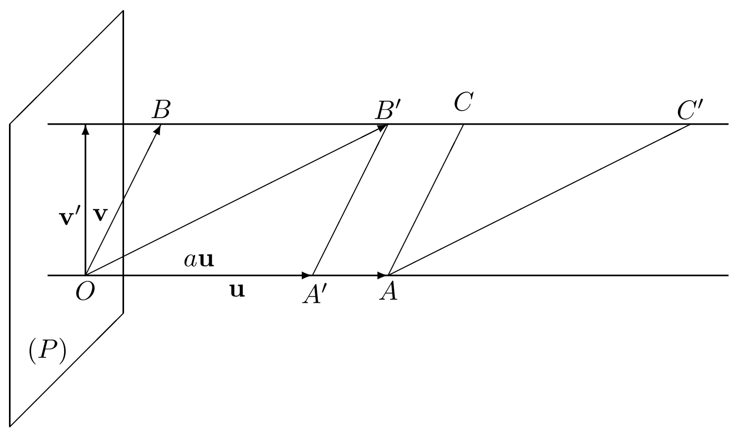

Fig. 6.1: Proprietăţile produsului vectorial

Deoarece vectorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{v}+a\mathbf{u}$ sunt coplanari, vectorii $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ şi $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+a\mathbf{u})$ sunt coliniari (fiind perpendiculari pe $\mathbf{u}$ şi pe $\mathbf{v}$). Pentru orice a, vectorii $\overrightarrow{OB}=\mathbf{v}$ şi $\overrightarrow{OB'}=\mathbf{v}+a\mathbf{u}$ sunt de aceeaşi parte a dreptei OA, deci bazele $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}\}$ şi $\{\mathbf{u},\mathbf{v}+a\mathbf{u},\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+a\mathbf{u})\}$ sunt la fel orientate. In fine paralelogramele $OACB$ şi $OAC'B'$ au arii egale, adică vectorii $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ şi $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+a\mathbf{u})$ au lungimi egale. Conchidem că cei doi vectori sunt egali.

6.4.3 Fie $\mathbf{u}$ un vector nenul, P un plan perpendicular pe $\mathbf{u}$, şi $\mathbf{v}$ un vector oarecare. Atunci: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{u}\times\mathrm{pr}_P\mathbf{v}$, adică, produsul vectorial nu se modifică dacă unul dintre vectori se înlocuieşte cu proiecţia sa pe un plan perpendicular pe celălalt.

R: Dacă $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ sunt coliniari, egalitatea este evidentă. Să presupunem că $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ sunt necoliniari. Vectorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{v}'=\mathrm{pr}_P\mathbf{v}$ sunt coplanari, există $a\in\mathbf{R}$ a.î. $\mathbf{v}'=\mathbf{v}+a\mathbf{u}$. Intr-adevăr, cum $\mathbf{v}'\cdot\mathbf{u}=0$, urmează $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+a\mathbf{u}^2=0$ şi deci $a=-\dfrac{1}{||\mathbf{u}||^2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ şi din exerciţiul precedent rezultă egalitatea propusă.

6.4.4 Să se arate că oricare ar fi vectorii $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$:

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}.$$

R: Dacă $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, proprietatea este imediată. Dacă $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ şi măcar unul din vectorii $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ este coliniar cu $\mathbf{u}$, folosind exerciţiul precedent, proprietatea rezultă prin calcul direct.

Presupunem că $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ şi că nici unul dintre vectorii $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ nu este este coliniar cu $\mathbf{u}$. Fie P un plan perpendicular pe $\mathbf{u}$ şi fie $\mathbf{v}'=\mathrm{pr}_P\mathbf{v}$, $\mathbf{w}'=\mathrm{pr}_P\mathbf{w}$. Cum $\mathrm{pr}_P(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{v}'+\mathbf{w}'$, egalitatea de demonstrat este echivalentă cu: $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}'+\mathbf{w}')=\mathbf{u}\times\mathbf{v}'+\mathbf{u}\times\mathbf{w}'$, în care însă $\mathbf{v}'\perp\mathbf{u}$, $\mathbf{w}'\perp\mathbf{u}$. Vectorul $\mathbf{u}$ fiind nenul, fie $\mathbf{u}_0=\dfrac{1}{||\mathbf{u}||}\mathbf{u}$, adică $\mathbf{u}=||\mathbf{u}||\,\mathbf{u}_0$. Atunci egalitatea de demonstrat este echivalentă cu

$$\mathbf{u}_0\times(\mathbf{v}'+\mathbf{w}')=\mathbf{u}_0\times\mathbf{v}'+\mathbf{u}_0\times\mathbf{w}'.$$

Este deci suficient să stabilim această egalitate.

Din punctul arbitrar O al spaţiului construim vectorii $\overrightarrow{OA_0}=\mathbf{u}_0$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{v}'$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{w}'$, $\overrightarrow{OD}=\mathbf{v}'+\mathbf{w}'$.

Vectorii $\overrightarrow{OB'}=\mathbf{u}_0\times\mathbf{v}'$, $\overrightarrow{OC'}=\mathbf{u}_0\times\mathbf{w}'$, $\overrightarrow{OD'}=\mathbf{u}_0\times(\mathbf{v}'+\mathbf{w}')$ se obţin, respectiv, din vectorii $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$, $\mathbf{v}'+\mathbf{w}'$ prin rotaţii de unghi egal cu $\dfrac{\pi}{2}$, în sens direct, în jurul dreptei OA_0. Cum $OBDC$ este un paralelogram, rezultă că patrulaterul $OB'D'C'$ este tot un paralelogram, obţinut din primul prin rotaţia de unghi $\dfrac{\pi}{2}$, deci $\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$, adică are loc egalitatea cerută.

6.4.5 (*Identitatea lui Lagrange*) Să se arate că oricare ar fi vectorii $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, are loc relaţia:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})^2=\mathbf{u}^2\mathbf{v}^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2.$$

6.4.6 Să se calculeze produsul vectorial al vectorilor $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

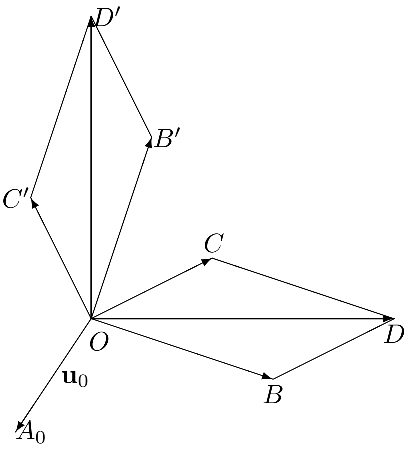

Fig. 6.2: Distributivitatea produsului vectorial

6.4.7 Să se determine α, a.î. vectorii $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ să fie coliniari.

R: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\alpha = -15$.

6.4.8 Să se arate că dacă vectorii $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ satisfac condiţia $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, atunci:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

6.4.9 Să se arate că vectorii: $\mathbf{a} \times \mathbf{u}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{w}$ sunt coplanari.

R: Toţi trei sunt ortogonali pe $\mathbf{a}$.

6.4.10 Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ ca laturi.

R: $\mathcal{A} = 11$.

6.4.11 Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ ca laturi, dacă:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{i}\sin u \sin v + \mathbf{j}\cos u \sin v, \ \mathbf{b} = \mathbf{i}\cos u \cos v + \mathbf{j}\sin u \cos v + \frac{\cos^2 v}{\sin v}\mathbf{k}.$$

R: $\mathcal{A} = |\cos v|$.

6.4.12 Să se calculeze aria triunghiului construit pe vectorii $\mathbf{u} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ ca laturi, dacă $||\mathbf{a}|| = 5$, $||\mathbf{b}|| = 3$ şi $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

6.4.13 Să se calculeze lungimea vectorului $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, ştiind că: $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

6.5 Produsul mixt. Dublul produs vectorial

6.5.1 Să se calculeze produsul mixt al vectorilor $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

R: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 2$.

6.5.2 Vectorul $\mathbf{u}$ este perpendicular pe vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$, iar unghiul dintre $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$ este $\frac{\pi}{6}$. Ştiind că $||\mathbf{u}|| = 2$, $||\mathbf{v}|| = 1$, $||\mathbf{w}|| = 2$, să se calculeze $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

6.5.3 Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ ca muchii, unde:

$$1)\ \mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k},\ \mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

$$2)\ \mathbf{u} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c},\ \mathbf{v} = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 4\mathbf{c},\ \mathbf{w} = 2\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 3\mathbf{c},$$

ştiind că $||\mathbf{a}|| = 3$, $||\mathbf{b}|| = \sqrt{2}$, $||\mathbf{c}|| = 1$, şi $(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}}) = \frac{\pi}{6}$, iar unghiul dintre vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ este $\frac{\pi}{4}$.

$$3)\ \mathbf{u} = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b},\ \mathbf{v} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b},\ \mathbf{w} = 2\mathbf{a} + 7\mathbf{b},$$

ştiind că $||\mathbf{a}|| = 3$, $||\mathbf{b}|| = 5$ şi $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{6}$.

$$4)\ \mathbf{u} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c},\ \mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{c},\ \mathbf{w} = \mathbf{b} + \mathbf{c},$$

ştiind că $||\mathbf{a}|| = 1$, $||\mathbf{b}|| = 2$, $||\mathbf{c}|| = 3$ şi: $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{2}$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{c}}) = \frac{\pi}{2}$, $(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}}) = \frac{\pi}{4}$.

R: 1) $\mathcal{V} = 25$, 2) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 22\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 11\,\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|\,\sqrt{2} = 33\frac{\sqrt{2}}{2}\,\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\| = 33$. 3) $\mathcal{V} = 0$.

6.5.4 Să se calculeze înălţimea paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ca muchii, luând ca bază paralelogramul construit pe vectorii $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ ca laturi.

R: $h = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{A}}$ şi $\mathcal{A} = ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||3i - 5j + k|| = \sqrt{35}$, $\mathcal{V} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 7$, deci $h = \frac{7}{5}\sqrt{35}$.

6.5.5 Se dau vectorii: $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Să se calculeze:
1) Versorii vectorilor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.
2) Aria paralelogramului construit pe vectorii $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{w}$ ca laturi.
3) Volumul tetraedului construit pe vectorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ ca muchii.
4) Inălţimea paralelogramlui construit pe vectorii $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{w}$ ca laturi.
5) Inălţimea paralipipedului construit pe vectorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ ca muchii.

R: 1) $\mathbf{u}_0 = \dfrac{1}{||\mathbf{u}||}\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\mathbf{v}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$, $\mathbf{w} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})$.
2) $\mathcal{A} = ||\mathbf{u}\times\mathbf{w}|| = ||-3i+j+2k|| = \sqrt{14}$.
3) $\mathcal{V} = \dfrac{1}{6}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \dfrac{2}{3}$. 4) $\sqrt{\dfrac{14}{3}}$. 5) $h = \dfrac{4}{\sqrt{14}}$.

6.5.6 Fie $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$. Să se arate că dacă $\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}+\mathbf{w}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$, atunci vectorii sunt coplanari.

R: $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$.

6.5.7 Să se calculeze produsele: $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ şi $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ dacă:

$$1)\ \mathbf{u} = \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{w} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}.$$
$$2)\ \mathbf{u} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{w} = -\mathbf{j}+2\mathbf{k}.$$

R: 1) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = 7(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$, $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{0}$. Rezultă că produsul vectorial nu este asociativ.

6.5.8 Se dau vectorii:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k},\ \mathbf{v} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\lambda\mathbf{k},\ \mathbf{w} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Să se determine λ a.î. vectorul $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ să fie paralel cu planul Oxy.

R: $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (1-2\lambda)\,\mathbf{i}+(4\lambda+1)\,\mathbf{j}-(\lambda+1)\,\mathbf{k}$. Din $[\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})]\cdot\mathbf{k} = 0$, rezultă $\lambda = -1$.

6.5.9 Să se arate că oricare ar fi vectorii $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$, are loc relaţia

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}+(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{u}+(\mathbf{w}\times\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

R: Avem: $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}.$ Permutând circular şi adunând, obţinem relaţia cerută.

6.5.10 Să se arate că oricare ar fi vectorii $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$, are loc relaţia

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{v}\times\mathbf{w},\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})^2.$$

R: Notăm $\mathbf{a} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$, $\mathbf{b} = \mathbf{v}\times\mathbf{w}$. Avem, succesiv:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{v}\times\mathbf{w},\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = \mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})] =$$
$$= \mathbf{a}\cdot[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{w}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{w})\,\mathbf{u}] = (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}) = (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})^2.$$

6.5.11 Fie $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3 \in V$ trei vectori necoplanari.
1) Să se determine vectorii $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3 \in V$ a.î. $\mathbf{e}'_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2,3$. Vectorii $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$ se numesc reciprocii vectorilor $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$.
2) Să se arate că $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}'_1+\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}'_2+\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}'_3 = \mathbf{0}$.
3) Să se arate că $(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\cdot(\mathbf{e}'_1+\mathbf{e}'_2+\mathbf{e}'_3) = 3$.

R: 1) Deoarece $\mathbf{e}'_1 \perp \mathbf{e}_2$ şi $\mathbf{e}'_1 \perp \mathbf{e}_3$, rezultă că $\mathbf{e}'_1 = \lambda(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$, iar din $\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$, deducem că $\lambda = \dfrac{1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$. Deci:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)},\ \mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)},\ \mathbf{e}'_3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

6.5.12 Să se determine vectorul $\mathbf{x}$ ştiind că $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$, dacă:

1) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$.
2) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

6.5.13 Să se determine vectorul $\mathbf{x}$ ştiind că $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ şi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = m$, dacă:

1) $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j},\ \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k},\ \mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ m = 1$.
2) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j},\ \mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j},\ m = 2$.
3) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j},\ m = 3$.

CAPITOLUL 7

SPAŢIUL PUNCTUAL EUCLIDIAN

7.1 Spaţiul punctual afin. Repere carteziene

7.1.1 Să se arate că oricare ar fi punctele M_0, M_1, $\ldots$, M_n, $n \geq 2$, are loc relaţia (*generalizarea relaţiei lui Chasles*):

$$\overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \cdots + \overrightarrow{M_{n-1}M_n} + \overrightarrow{M_nM_0} = \mathbf{0}.$$

R: Demonstraţie prin inducţie matematică.

7.1.2 Să se arate că $d^2(M_1, M_2) = d^2(M_0, M_1) + d^2(M_0, M_2)$ d.d. $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0M_2} = 0$.

R: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_0M_2} - \overrightarrow{M_0M_1}$ şi $d(M_1, M_2) = ||\overrightarrow{M_1M_2}||$.

7.1.3 Fie M_0, M_1, M_2, M_3 patru puncte şi $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$, $i = 0, 1, 2, 3$, vectorii lor de poziţie în raport cu un punct fix O. Să se arate că cele patru puncte sunt coplanare d.d. există numerele reale α_1, α_2, α_3 cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ a.î. $\alpha_1\mathbf{r}_1 + \alpha_2\mathbf{r}_2 + \alpha_3\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_0$.

R: Punctele sunt coplanare d.d. vectorii $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$, $\overrightarrow{M_0M_3}$ sunt coplanari, adică d.d. există numerele reale α_1, α_2, α_3, nu toate nule a.î.

$$\alpha_1\overrightarrow{M_0M_1} + \alpha_2\overrightarrow{M_0M_2} + \alpha_3\overrightarrow{M_0M_3} = \mathbf{0},$$

care este echivalentă cu afirmaţia din enunţ.

7.1.4 Fie A, B, C trei puncte necoliniare şi A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB ale triunghilui ABC. Să se arate că oricare ar fi punctul fix O, au loc relaţiile:

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

R: Deoarece $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ rezultă că $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OB}^2)$.

7.1.5 Fie $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ bisectoarele interioare ale triunghiului ABC şi a, b, c lungimile laturilor triunghiului.

1) Să se stabilească relaţiile:

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}, \ \ \overrightarrow{BB'} = \frac{c\overrightarrow{BC} + a\overrightarrow{BA}}{c+a}, \ \ \overrightarrow{CC'} = \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a+b}.$$

2) Fie $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{r}_B = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{r}_C = \overrightarrow{OC}$ şi $\mathbf{r}'_A = \overrightarrow{OA'}$, $\mathbf{r}'_B = \overrightarrow{OB'}$, $\mathbf{r}'_C = \overrightarrow{OC'}$ vectorii de poziţie ai punctelor A, B, C, A', B', C' în raport cu un punct fix O. Să se arate că:

$$\mathbf{r}'_A = \frac{b\mathbf{r}_B + c\mathbf{r}_C}{b+c}, \ \ \mathbf{r}'_B = \frac{c\mathbf{r}_C + a\mathbf{r}_A}{c+a}, \ \ \mathbf{r}'_C = \frac{a\mathbf{r}_A + b\mathbf{r}_B}{a+b}.$$

R: 1) Punctul A' împarte segmentul orientat $\overline{BC}$ în raportul $k = \frac{c}{b}$ (teorema bisectoarei). 2) $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{r}'_A - \mathbf{r}_A$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ etc.

7.1.6 Să se arate că dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru $ABCD$ sunt concurente.

R: Perechile de muchii opuse ale tetraedrului $ABCD$ sunt (AD, BC), (AB, CD), (AC, DB). Fie A' mijlocul segmentului orientat $\overline{AD}$, A'' mijlocul segmentului orientat $\overline{BC}$ şi D' mijlocul segmentului orientat $\overline{A'A''}$. Atunci:

$$\mathbf{r}_{A'} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_D), \ \mathbf{r}_{A''} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C),$$

$$\mathbf{r}_{D'} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{A'} + \mathbf{r}_{A''}) = \frac{1}{4}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_D).$$

Calculând vectorii de poziţie $\mathbf{r}_{B'}$, $\mathbf{r}_{C'}$ ai mijloacelor segmentelor orientate care au ca extremităţi mijloacele celorlalte două perechi de muchii opuse obţinem: $\mathbf{r}_{B'} = \mathbf{r}_{C'} = \mathbf{r}_{D'}$.

7.1.7 Fie M_1, M_2, M_3 trei puncte şi $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$, $i = 1, 2, 3$, vectorii lor de poziţie în raport cu un punct fix O. Să se arate că punctele sunt coliniare d.d.

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}.$$

R: Punctele M_1,M_2, M_3 sunt coliniare d.d. vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ sunt coliniari, adică d.d. $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \mathbf{0}$.

7.1.8 In reperul cartezian în spaţiu $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, se dau punctele

$$M_1(5, 2, -1), \ M_2(1, -3, 4), \ M_3(-2, 1, 3), \ M_4(2, 6, -2).$$

1) Să se arate că patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram.

2) Să se găsească coordonatele celor patru puncte în reperul $\mathcal{R}' = \{O', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ obţinut din reperul $\mathcal{R}$ prin translaţia de vector $\mathbf{r}_0 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$.

R: 1) Se verifică relaţia: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$. 2) $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$, $i = \overline{1,4}$.

7.1.9 In reperul cartezian în spaţiu $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, se dau punctele

$$M_1(4,-2,3),\ M_2(2,2,-1),\ M_3(6,-2,-5).$$

Să se determine coordonatele mijloacelor laturilor triunghiului cu vârfurile în aceste puncte.

R: $M'_1(4,0,-3)$, $M'_2(5,-2,-1)$, $M'_3(3,0,1)$.

7.1.10 In reperul cartezian ortonormat plan $\mathcal{R}$ se dau punctele:

$$A\left(1,2\sqrt{2}\right),\ B\left(-2,\sqrt{5}\right),\ C\left(-\sqrt{7},-\sqrt{2}\right),\ D\left(2,-\sqrt{5}\right).$$

Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

R: Se arată că: $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) = \pi$.

7.1.11 In reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}$ se dau punctele:

$$A\,(14,-7,2)\,,\ B\,(2,2,-7)\,,\ C\,(-2,7,2)\,.$$

1) Să se arate că triunghiul AOB este dreptunghic.
2) Să se arate că triunghiul BOC este isoscel.
3) Să se calculeze unghiul A al triunghiului ABC.
4) Să se determine un vector director al bisectoarei unghiului A al triunghiului ABC.

R: 1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$. 2) $\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{57}$.

3) $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \dfrac{53}{\sqrt{34}\sqrt{113}}$.

4) $\mathbf{v} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{34}}(-4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}) + \dfrac{1}{\sqrt{113}}(-8\mathbf{i}+7\mathbf{j})$.

7.1.12 In reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}$ se dau punctele:

$$M_0(-1,0,-1),\ M_1(0,2,-3),\ M_2(4,4,1).$$

1) Să se calculeze perimetrul triunghiului $M_0M_1M_2$.
2) Să se calculeze aria triunghiului $M_0M_1M_2$.

R: 1) $p = 9+3\sqrt{5}$. 2) $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\left|\left|\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2\right|\right| = 3\left\|2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}\right\| = 9$.

7.1.13 Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele:

$$M_0(1,-1,1),\ M_1(2,1,-1),\ M_2(3,2,-6).$$

R: $\mathcal{A}_t = \dfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{74}.$

7.1.14 Să se arate că triunghiul cu vârfurile în punctele

$$M_0(1,2,3),\ M_1(1,4,1),\ M_2(3,2,1)$$

este echilateral şi să se calculeze aria sa.

7.1.15 Punctele $A\,(-1,2,-2)$, $B\,(-2,5,1)$, $C\,(-1,6,0)$, $D\,(2,3,-6)$ sunt vârfurile unui patrulater. Să se arate că patrulaterul este plan şi să se calculeze aria sa.

R: Deoarece

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că patrulaterul este plan. Apoi,

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ADC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC}\right\| = 4\sqrt{14}.$$

7.1.16 Fie paralelogramul $ABCD$ şi O un punct fixat din spaţiu a.î.

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \overrightarrow{OB} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k},\ \overrightarrow{OC} = 7\mathbf{i}+9\mathbf{j}+11\mathbf{k}.$$

Să se determine $\overrightarrow{OD}$ şi aria triunghiului OBD.

7.1.17 Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele:

$$M_0(1,-1,1),\ M_1(2,1,-1),\ M_2(3,2,-6),\ M_3(4,4,-2).$$

R: $\mathcal{V}_t = \dfrac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 1 \\ 4 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

7.1.18 Să se calculeze volumul tetraedrului $M_0M_1M_2M_3$ şi înălţimea tetraedrului coborâtă din M_3, dacă:

1) $M_0(1,-5,4),\ M_1(0,-3,1),\ M_2(-2,-4,3),\ M_3(1,1,-2)$.
2) $M_0(1,1,2),\ M_1(0,1,1),\ M_2(-1,2,-3),\ M_3(2,3,0)$.
3) $M_0(1,0,4),\ M_1(0,-1,3),\ M_2(0,2,-1),\ M_3(1,3,7)$.

R: 1) $\mathcal{V}_t = 3$. Din $\mathcal{V}_t = \dfrac{h}{3}\mathcal{A}_t$ se obţine $h = \dfrac{3}{5}\sqrt{10}$.

7.1.19 Se dau punctele:

$$A(3,2,1),\ B(4,4,0),\ C(5,5,5),\ D(-1,5,-1).$$

Să se cerceteze dacă cele patru puncte sunt coplanare şi să se arate că $\widehat{BAC} = \widehat{BAD}$.

7.1.20 Să se determine α real a.î. punctele:

$$M_0(1,0,2),\ M_1(-1,1,-1),\ M_2(1,1,-1),\ M_3(2,3,-\alpha)$$

să fie coplanare.

R: Punctele sunt coplanare dacă:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -\alpha & 1 \end{vmatrix} = 14 - 2\alpha = 0,$$

deci $\alpha = 7$.

7.2 Schimbarea reperelor carteziene

7.2.1 In reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, se dă punctul M de coordonate $(4,-2,5)$. Să se găsească coordonatele sale în reperul $\mathcal{R}' = \{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, obţinut din reperul $\mathcal{R}$ prin translaţia de vector $\mathbf{r}_0 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ şi schimbarea centro-afină:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 12\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

R: Legătura dintre coordonate este dată de: $X' = C^{-1}(X - X_0)$, adică:

$$X' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ -25 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Deci în reperul $\mathcal{R}'$ punctul M are coordonatele $(32,-25,8)$.

7.2.2 Reperul ortonormat plan $\mathcal{R}'$ se obţine din reperul ortonormat plan $\mathcal{R}$ printr-o rotaţie de unghi α. Să se determine α astfel încât punctul $M(\sqrt{3},1)$ să aparţină axei Ox'.

R: $y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$, de unde $-\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = 0$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

7.2.3 In reperul ortonormat plan $\mathcal{R}$, se dau punctele: $A(5,5)$ şi $B(2,-1)$. Să se determine coordonatele lor în reperul ortonormat $\mathcal{R}'$ cu originea în punctul B şi ale cărui axe se rotesc cu unghiul $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

R: Avem: $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, deci: $x' = \dfrac{4}{5}(x-2) + \dfrac{3}{5}(y+1)$, $y' = -\dfrac{3}{5}(x-2) + \dfrac{4}{5}(y+1)$, $A(6,3)$, $B(0,0)$.

7.2.4 Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat având lungimea laturii egală cu 2 şi $\mathcal{R}$ un reper ortonormat cu originea în punctul C, $\mathcal{R} = \{C, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, în care versorul $\mathbf{i}$ este coliniar şi are acelaşi sens cu $\overrightarrow{BC}$, iar versorul $\mathbf{j}$ este coliniar şi are acelaşi sens cu $\overrightarrow{EC}$. Fie încă $\mathcal{R}'$ un reper ortonormat cu originea în punctul F, $\mathcal{R}' = \{F, \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$, în care versorul $\mathbf{i}'$ este coliniar şi are acelaşi sens cu $\overrightarrow{FA}$, iar versorul $\mathbf{j}'$ este coliniar şi are acelaşi sens cu $\overrightarrow{DF}$. Să se găsească:

1) Rotaţia şi translaţia care duc reperul $\mathcal{R}$ în reperul $\mathcal{R}'$.
2) Legătura dintre coordonatele unui punct în cele două repere.
3) Coordonatele punctelor A şi B în cele două repere.

R: 1) Translaţia: $\overrightarrow{CF} = -2\mathbf{i} - 2\sqrt{3}\mathbf{j}$, rotaţia: $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ şi deci

$$\mathbf{i}' = \frac{1}{2}(-\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}), \ \ \mathbf{j}' = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j}).$$

2) $x = -2 - \dfrac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3})$, $y = -2\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}(x'\sqrt{3} - y')$.
3) $A(2,0)_{\mathcal{R}'}$, $A(-3, -\sqrt{3})_{\mathcal{R}}$, $B(-2,0)_{\mathcal{R}}$, $B(3, -\sqrt{3})_{\mathcal{R}'}$.

7.2.5 In reperul cartezian ortonormat plan $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ coordonatele (x, y) ale unui punct M verifică ecuaţia: $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$.

1) Să se găsească ce devine ecuaţia în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = \{O', \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, obţinut din reperul $\mathcal{R}$ prin translaţia $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{r}_0 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

2) Să se găsească ce devine ecuaţia în reperul polar cu polul O' şi axă polară $O'x'$.

R: 1) Deoarece $x = 1 + x'$, $y = -2 + y'$, se obţine$(x')^2 + 2\,(y')^2 - 8 = 0$.
2) Luând: $x' = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, obţinem: $r^2(1 + \sin^2\theta) = 8$.

7.2.6 In reperul cartezian ortonormat plan $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ coordonatele (x, y) ale unui punct M verifică ecuaţia: $5x^2 + 24xy - 2y^2 - 4 = 0$. Să se găsească ce devine ecuaţia în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = \{O, \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$, obţinut din reperul $\mathcal{R}$ printr-o rotaţie de unghi $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

R: Deoarece $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$, cu $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, avem $x = \dfrac{1}{5}(4x' - 3y')$, $y = \dfrac{1}{5}(3x' + 4y')$. Se obţine

$$14(x')^2 - 11(y')^2 - 4 = 0.$$

7.2.7 In reperul cartezian ortonormat plan $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ coordonatele (x, y) ale unui punct M verifică ecuaţia: $3x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Să se găsească ce devine ecuaţia în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = \{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$, obţinut din reperul $\mathcal{R}$ prin translaţia de vector $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, urmată de rotaţia de unghi $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

R: Deoarece: $x = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$, $y = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$. In reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}'$ ecuaţia se scrie: $(x')^2 + 5(y')^2 - 1 = 0$.

7.2.8 In reperul cartezian ortonormat plan $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ coordonatele (x, y) ale unui punct M verifică ecuaţia (E). Să se găsească ce devine ecuaţia în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = \{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$, obţinut din reperul $\mathcal{R}$ prin translaţia de vector $\mathbf{r}_0$, urmată de rotaţia de unghi α, dacă:

1) (E) $2xy - 2x - 4y + 3 = 0$, $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
2) (E) $x^2 - 4xy + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$, $\mathbf{r}_0 = \frac{1}{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.
3) (E) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$, $\mathbf{r}_0 = -2\mathbf{i}$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.
4) (E) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

7.2.9 Să se găsească matricea rotaţiei în spaţiu care duce reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ în reperul ortonormat $\mathcal{R}' = \{O, \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ dacă versorul $\mathbf{k}'$ are aceeaşi direcţie şi sens cu vectorul $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, versorul $\mathbf{i}'$ este paralel cu planul Oxy şi unghiul dintre $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{i}'$ este mai mic decât $\frac{\pi}{2}$, iar versorul $\mathbf{j}'$ este astfel încât $\mathcal{R}'$ să fie un reper ortonormat drept.

R: $\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{i}' = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$, cu $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}' = 0$ şi $\|\mathbf{i}'\| = 1$, deci $\mathbf{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, iar $\mathbf{j}' = \mathbf{k}' \times \mathbf{i}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$. Aşadar:

$$\mathbf{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}), \ \mathbf{j}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}), \ \mathbf{k}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Matricea rotaţiei este:

$$C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

7.2.10 Să se găsească matricea rotaţiei în spaţiu care duce reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ în reperul ortonormat $\mathcal{R}' = \{O, \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ dacă axa Ox' se obţine din Ox printr-o rotaţie plană de unghi φ în jurul axei Oz, axa Oz' se obţine din Oz printr-o rotaţie plană de unghi θ în jurul axei Ox', iar Oy' completează reperul ortonormat $\mathcal{R}'$.

7.2.11 In reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ coordonatele (x, y, z) ale unui punct M verifică ecuaţia: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z - 22 = 0$. Să se găsească ce devine ecuaţia în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = \{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$, obţinut din reperul $\mathcal{R}$ prin translaţia de vector $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + \mathbf{3j} + \mathbf{k}$.

7.2.12 In reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ coordonatele (x, y, z) ale unui punct M verifică ecuaţia: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 3 = 0$. Să se găsească ce devine ecuaţia în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = \{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$, obţinut din reperul

$\mathcal{R}$ prin translaţia de vector $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, urmată de rotaţia de matrice:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.2.13 In reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ coordonatele (x, y, z) ale unui punct M verifică ecuaţia: $x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$. Să se găsească ce devine ecuaţia în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = \{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$, obţinut din reperul $\mathcal{R}$ prin translaţia de vector $\mathbf{r}_0 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, urmată de rotaţia de matrice:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

7.2.14 Să se arate că o rotaţie în spaţiu se poate obţine prin efectuarea succesivă a trei rotaţii plane în jurul a trei axe: o rotaţie de unghi φ în jurul axei Oz, o rotaţie de unghi θ în jurul liniei nodurilor şi o rotaţie de unghi ψ în jurul axei Oz'.

R: Intr-adevăr,

$$C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

7.2.15 Punctele $M_1(-7, 3, -2)$, $M_2(0, 2, 1)$, $M_3(4, -1, 0)$, $M_4(-1, 0, -3)$ sunt vârfurile unui tetraedru. După o translaţie $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$, centrul de greutate G al tetraedrului are coordonatele $(6, -2, 1)_{\mathcal{R}'}$. Să se găsească coordonatele vârfurilor tetraedrului după translaţie.

R: Avem:

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{4}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

şi $\mathbf{r}'_G = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Deci translaţia este

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_G - \mathbf{r}'_G = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \text{ şi } \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0.$$

7.2.16 Fie $M_1(4, 8, -3)$, $M_2(6, -1, 1)$, $M_3(-2, 3, 5)$ trei puncte date prin coordonatele lor în reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Să se determine coordonatele lor în reperul ortonormat $\mathcal{R}' = \{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$, obţinut din reperul $\mathcal{R}$ prin translaţia $\mathbf{r}_0 = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ şi schimbarea centro-afină (rotaţia) de matrice

$$C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

R: Se constată că ${}^tC\,C = I_3$ şi $\det C = 1$, deci schimbarea centro-afină este o rotaţie în spaţiu. Din $X' = C^{-1}(X - X_0) = {}^tC\,(X - X_0)$, găsim, de exemplu, pentru M_1:

$$X' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

7.2.17 Coordonatele (x, y, z) ale punctului M verifică relaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 2z + 17 = 0.$$

Să se determine translaţia reperului, astfel încât relaţia între coordonatele (x', y', z') ale punctului M în noul reper să nu conţină termeni de gradul întâi.

R: Deoarece:

$$x = x_0 + x',\ y = y_0 + y',\ z = z_0 + z',$$

se obţine: $x_0 = -3$, $y_0 = 4$, $x_0 = 1$, iar ecuaţia devine: $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - 9 = 0$.

7.3 Repere polare

7.3.1 Să se afle coordonatele polare ale punctelor:

$$A(-2\sqrt{3}, 2),\ B(2, -2),\ C(\sqrt{3}, -1).$$

R:Avem:
A: $r = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$,
B: $r = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$,
C: $r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi = \frac{11\pi}{6}$.

7.3.2 Coordonatele polare ale punctului M sunt:

$$r = 2\sqrt{5},\ \varphi = \operatorname{arctg} 7.$$

Să se determine coordonatele sale carteziene.

7.3.3 Punctul M are coordonatele sferice

$$r = 4,\ \varphi = \frac{\pi}{6},\ \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Să se determine coordonatele carteziene şi cilindrice ale punctului M.

7.3.4 Să se determine coordonatele carteziene ale punctului M_1 de coordonate sferice $\left(8, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ şi coordonatele cilindrice (r', φ, z) ale punctului M_2 de coordonate carteziene $(1, 1, 1)$.

R:Avem:
M_1: $x = 8\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 4$, $y = 8\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 4$, $z = 8\cos\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}$,
M_2: $r' = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $z = 1$.

7.3.5 Să se determine coordonatele carteziene ale punctelor M de coordonate sferice:

$$M_1\left(8, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right), \ M_2\left(12, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right), \ M_3\left(4, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

7.3.6 Să se determine coordonatele sferice ale punctelor:

$$A\left(2\sqrt{3}, 6, 4\right), \ B\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right), \ C\left(0, -6\sqrt{3}, -6\right), \ D\left(-16, 0, 0\right).$$

7.3.7 Să se determine coordonatele carteziene ale punctelor M_1 şi M_2 de coordonate cilindrice $\left(2, \frac{\pi}{6}, -2\right)$ şi respectiv $(1, 0, 1)$.

7.3.8 Să se determine coordonatele cilindrice ale punctelor:

$$A\left(2, 2\sqrt{3}, 5\right), \ B\left(-3, \sqrt{3}, -4\right), \ C\left(4, -4, 6\right), \ D\left(-3\sqrt{3}, -9, 0\right), \ E\left(0, 0, 4\right).$$

CAPITOLUL 8

DREAPTA ŞI PLANUL

8.1 Dreapta în plan

8.1.1 Să se scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei D determinată de punctul $M_0(2,3)$ şi vectorul director $\mathbf{v}(-1,4)$. Să se găsească apoi ecuaţia sa canonică şi ecuaţia generală.

R: Ecuaţiile parametrice: $x = 2 - t$, $y = 3 + 4t$, $t \in \mathbf{R}$, ecuaţiile canonică şi generală sunt:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{4}, \quad 4x + y - 11 = 0.$$

8.1.2 Să se găsească punctele de intersecţie ale dreptei D de ecuaţie $2x+3y-12=0$ cu axele de coordonate.

R: $A\,(6,0)$, $B\,(0,4)$.

8.1.3 Să se găsească punctele de intersecţie ale dreptelor:

$$(D_1)\ \ 3x - 4y - 29 = 0, \quad (D_2)\ \ 2x + 5y + 19 = 0.$$

R: $M_0(3,-5)$.

8.1.4 Se dau ecuaţiile a două laturi ale unui paralelogram:

$$8x + 3y + 1 = 0, \ \ 2x + y - 1 = 0$$

şi ecuaţia uneia dintre diagonalele sale: $3x + 2y + 3 = 0$. Să se găsească coordonatele vârfurilor paralelogramului.

R: $(1,-3)$, $(-2,5)$, $(5,-9)$, $(8,-17)$.

8.1.5 Să se calculeze aria triunghiului cu laturile pe dreptele:

1) $x + 5y - 7 = 0,\ 3x - 2y - 4 = 0,\ 7x + y + 19 = 0.$
2) $x + y - a = 0,\ x - 2y - 4a = 0,\ x - y - 7a = 0.$
3) $x - y + 1 = 0,\ 2x + y - 4 = 0,\ 4x - y - 8 = 0.$

R:Avem:
1) $M_1(2,1)$, $M_2(-3,2)$, $M_3(-2,-5)$, $\mathcal{A}=17$,
2) $M_1(2a,-a)$, $M_2(4a,-3a)$, $M_3(10a,3a)$, $\mathcal{A}=12a^2$,
3) $M_1(1,2)$, $M_2(3,4)$, $M_3(2,0)$, $\mathcal{A}=3$.

8.1.6 Să se găsească ecuaţia dreptei care trece prin punctele:

$$1)\ M_0(a+1,a-1),\ M_1(a-1,a+1).\ 2)\ M_0(\cos 2t,-\sin 2t),\ M_1(\cos 4t,\sin 4t).$$

R: 1) $x+y-2a=0$. 2) $x\cos t+y\sin t-\cos 3t=0$.

8.1.7 Să se arate că punctele $M_0(a,b+c)$, $M_1(b,c+a)$, $M_2(c,a+b)$ sunt coliniare şi să se scrie ecuaţia dreptei care le conţine.
R: $x+y-a-b-c=0$.

8.1.8 Să se scrie ecuaţiile dreptelor care trec prin vârfurile

$$M_1(5,-4),\ M_2(-1,3),\ M_3(-3,-2)$$

ale triunghiului $M_1M_2M_3$ şi sunt paralele cu laturile opuse.

R: $\overrightarrow{M_1M}\|\overrightarrow{M_2M_3}$, $\overrightarrow{M_2M}\|\overrightarrow{M_3M_1}$, $\overrightarrow{M_3M}\|\overrightarrow{M_1M_2}$, implică:

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+4}{5},\quad \frac{x+1}{8}=\frac{y-3}{-2},\quad \frac{x+3}{6}=\frac{y+2}{-7}.$$

8.1.9 Se dă triunghiul cu vârfurile în punctele: $A\,(-1,3)$, $B\,(2,-1)$, $C\,(3,6)$. Să se determine:
1) Ecuaţia dreptei AC.
2) Ecuaţia paralelei prin B la AC.
3) Ecuaţia mediatoarei laturii $[BC]$.
4) Ecuaţia medianei din C.
5) Ecuaţia înălţimii din C.

8.1.10 Să se găsească proiecţia punctului $M^*(-6,4)$ pe dreapta: $(D)\ 4x-5y+3=0$.

R: Intersectăm perpendiculara prin M^* pe dreapta D, ale cărei ecuaţii sunt: $x=-6+4t$, $y=4-5t$, $t\in\mathbf{R}$, cu dreapta D. Rezultă $41t-41=0$, deci $t=1$. Proiecţia punctului M^* este punctul $M'\,(-2,-1)$.

8.1.11 Să se găsească simetricul punctului $M^*(2,1)$ faţă de dreapta

$$(D)\ \ 2x-y+2=0.$$

R: Dacă M' este proiecţia ortogonală a punctului M^* pe dreapta D şi M'^* simetricul punctului M^*, atunci: $\mathbf{r}'^*=2\mathbf{r}'-\mathbf{r}^*$, de unde $M'^*(-2,3)$.

8.1.12 Să se afle distanţa de la punctul M^* la dreapta D dacă:

$$1)\ M^*(2,1),\ (D)\ 4x-3y+5=0.\ 2)\ M^*(2,6),\ (D)\ x-y\sqrt{3}+6=0.$$

R: 1) $d\,(M^*, D) = 2$. 2) $d\,(M^*, D) = 3\sqrt{3} - 4$.

8.1.13 Să se arate că triunghiul cu vârfurile în punctele $A\,(3,3)$, $B\,(6,3)$, $C\,(3,6)$ este dreptunghic isoscel.

8.1.14 Pentru ce valori ale lui λ dreptele de ecuaţii:

$$\lambda x + (\lambda - 1)y - 2(\lambda + 1) = 0,\ 3\lambda x - (3\lambda + 1)y - 5\lambda - 4 = 0,$$

1) *sunt paralele,* 2) *sunt perpendiculare,* 3) *fac un unghi de* 45^0.

R: 1) $\dfrac{\lambda}{3\lambda} = \dfrac{\lambda - 1}{-(3\lambda + 1)}$), 2) $3\lambda^2 - (\lambda - 1)(3\lambda + 1) = 0$,
3) $\dfrac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}'}{||\mathbf{N}||\,||\mathbf{N}'||} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, care implică $\left(6\lambda^2 + 1\right)\left(6\lambda^2 - 4\lambda - 1\right) = 0$, de unde: $\lambda = \dfrac{1}{3} \pm \dfrac{1}{6}\sqrt{10}$.

8.1.15 Să se scrie ecuaţiile înălţimilor triunghiului cu vârfurile în punctele:

$$M_1(2,1),\ M_2(-1,-1),\ M_3(3,2).$$

R: $\overrightarrow{M_1M} \perp \overrightarrow{M_2M_3}$, deci $(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0$, de unde $4x + 3y - 11 = 0$. Analog: $x + y + 2 = 0$, $3x + 2y - 13 = 0$.

8.1.16 Să se găsească ecuaţiile bisectoarelor unghiului interior şi exterior corespunzătoare vârfului A al triunghului cu vârfurile în punctele $A(1,-2)$, $B(5,4)$, $C(-2,0)$.

R: Un vector director al bisectoarei interioare a unghiului A este

$$\mathbf{v} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(-\mathbf{i} + 5\mathbf{j}\right),$$

deci ecuaţiile canonice ale celor două bisectoare sunt:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5},\ \ \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{1}.$$

8.1.17 Fie $A\,(-1,0)$, $B\,(1,-2)$. Să se determine:
1) Simetricul punctului A faţă de punctul B.
2) Coordonatele punctului M care împarte segmentul orientat $\overline{AB}$ în raportul $k = -\dfrac{2}{3}$.

8.1.18 Ştiind că punctul $M_0\,(3,4)$ este piciorul perpendicularei coborâte din origine pe dreapta D, să se găsească ecuaţia dreptei D.

8.2 Planul

8.2.1 Să se verifice dacă planul $4x - y + 3z + 1 = 0$ trece prin unul din punctele:

$$A(-1, 6, 3),\ B(3, -2, -5),\ C(0, 4, 1),\ D(2, 0, 5).$$

8.2.2 Să se precizeze poziţia următoarelor plane în raport cu reperul $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{lll} 1)\ 2y - z + 5 = 0. & 2)\ 2x + 5z + 1 = 0. & 3)\ 3x + y - 2 = 0. \\ 4)\ 2x - 5 = 0. & 5)\ 3y - 2 = 0. & 6)\ -4z + 3 = 0. \end{array}$$

R: 1), 2), 3): plane paralele respectiv cu axele: Ox, Oy, Oz. 4), 5), 6): plane perpendiculare respectiv cu axele: Ox, Oy, Oz.

8.2.3 Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(2, 4, -3)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{v}_1(0, 0, 1)$ şi $\mathbf{v}_2(5, 3, -2)$.

R: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$, adică $3x - 5y + 14 = 0$.

8.2.4 Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(1, 2, 1)$ şi este perpendicular pe planele:

$$(P_1)\ 3x - 2y + 1 = 0,\ \ (P_2)\ 2x + z - 3 = 0.$$

8.2.5 Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $M_0(1, 0, -2)$, $M_1(4, 5, 1)$ şi este paralel cu vectorul $\mathbf{v}\,(0, 6, -1)$.

R: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}) = 0$, adică $-23x + 3y + 18z + 59 = 0$.

8.2.6 *S*ă se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $M_0(1, 0, -1)$, $M_1(2, 1, 3)$ şi este paralel cu vectorul $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

8.2.7 Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $M_0(1, 2, 1)$, $M_1(2, 3, 4)$ şi este perpendicular pe planul

$$(P)\ \ x + y + 3z + 5 = 0.$$

8.2.8 Să se scrie ecuaţia planului:
1) paralel cu planul Oxz şi care trece prin punctul $M_0(2, -5, 3)$.
2) care trece prin axa Oz şi prin punctul $M_0(-3, 1, -2)$.
3) paralel cu axa Ox şi care trece prin punctele $M_0(4, 0, -2)$, $M_1(5, 1, 7)$.

R: 1) $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{i}, \mathbf{k}) = 0$, adică $y + 5 = 0$.
2) $(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \mathbf{k}) = 0$, adică $x + 3y = 0$.
3) $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{i}) = 0$, adică $9y - z - 2 = 0$.

8.2.9 Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(2, -7, 3)$ şi este perpendicular pe vectorul $\mathbf{N} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

R: $\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, adică $4x + 5y - z - 30 = 0$.

8.2.10 Se dau punctele $M_0(1, 3, -2)$ şi $M_1(7, -4, 4)$. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul M_0 şi este perpendicular pe dreapta M_0M_1.

R: $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, adică $6x - 7y + 6z + 27 = 0$.

8.2.11 Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(-2, 7, 3)$ şi este paralel cu planul $2x - y + 5z + 3 = 0$.

R: $\mathbf{N} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, adică $2x - y + 5z - 1 = 0$.

8.2.12 Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele

$$M_0(1, -3, 2),\ M_1(5, 1, -4),\ M_2(2, 0, 3).$$

R: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) = 0$, adică $11x - 5y + 4z - 34 = 0$.

8.2.13 Să se scrie ecuaţiile feţelor tetraedrului cu vârfurile în punctele

$$A(0, 0, 2),\ B(3, 0, 5),\ C(1, 1, 0),\ D(4, 1, 2).$$

R: (ABC): $-3x + 9y + 3z - 6 = 0$, (ABD): $-3x + 12y + 3z - 6 = 0$,
(ACD): $2x - 8y - 3z + 6 = 0$, (BCD): $2x - 11y + 9 - 3z$.

8.2.14 Să se calculeze distanţa:
1) de la punctul $M^*(1, 1, 1)$ la planul (P) $2x + y + 2z - 20 = 0$.
2) de la punctul $M^*(3, 1, -1)$ la planul (P) $22x + 4y - 20z - 45 = 0$.
3) de la origine la planul (P) $15x - 10y + 6z - 38 = 0$.
4) de la punctul $M^*\,(2, 4, 7)$ la planul (P) $x - 2y + 2z + 2 = 0$.

R: 1) $d = 5$. 2) $d = \dfrac{3}{2}$. 3) $d = 2$. 4) $d = 4$.

8.2.15 Să se determine ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(7, -5, 1)$ şi taie axele de coordonate la distanţe egale faţă de origine.

R: $\dfrac{7}{a} - \dfrac{5}{a} + \dfrac{1}{a} - 1 = 0$, de unde $a = 3$, deci $x + y + z - 3 = 0$.

8.2.16 Să se scrie ecuaţiile planelor bisectoare ale unghiului diedru format de planele:

$$(P_1)\ \ x + y + z - 1 = 0,\ \ (P_2)\ \ 2x + y + z - 1 = 0.$$

R: $\mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{N}_1}{||\mathbf{N}_1||} \pm \dfrac{\mathbf{N}_2}{||\mathbf{N}_2||} = \dfrac{\sqrt{2} \pm 1}{\sqrt{6}}(\pm\mathbf{i}\sqrt{2} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ şi $M_0(0, 0, 1)$.

8.3 Dreapta în spaţiu

8.3.1 Să se găsească o reprezentare parametrică şi ecuaţiile canonice ale dreptei care trece prin punctul $M_0(-1,2,1)$ şi este paralelă cu vectorul $\mathbf{v}(-2,3,4)$.

R: Din $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbf{R}$ şi $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, obţinem:

$$\begin{cases} x = -1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \quad t \in \mathbf{R}, \\ z = 1 + 4t, \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}.$$

8.3.2 Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a dreptelor:

$$1)\ (D) \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = -1 + 3t, \quad t \in \mathbf{R} \text{ şi } (D') \\ z = t, \end{cases} \begin{cases} x = -1 + 7t', \\ y = 8 - 3t', \quad t' \in \mathbf{R}. \\ z = 3 + t', \end{cases}$$

$$2)\ (D) \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 - 3t, \quad t \in \mathbf{R} \text{ şi } (D') \\ z = t - 1, \end{cases} \begin{cases} x = 1 + t', \\ y = -t', \quad t' \in \mathbf{R}. \\ z = 6 - 3t', \end{cases}$$

R: 1) $t = 3$, $t' = 0$, $M_0\,(-1,8,3)$. 2) $t = 1$, $t' = 2$, $M_0\,(3,2,0)$.

8.3.3 Să se găsească ecuaţiile dreptei care trece prin punctul $M_0(-1,2,1)$ şi este paralelă cu dreapta: $x + y - 2z - 1 = 0$, $x + 2y - z + 1 = 0$.

R: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$.

8.3.4 Dreptele D_1 şi D_2 au direcţiile date de vectorii $\mathbf{v}_1\,(1,0,1)$ şi $\mathbf{v}_2\,(-1,1,0)$. Să se determine:

1) Unghiul dintre cele două drepte.

2) Ecuaţiile parametrice ale dreptei D perpendiculară pe dreptele D_1 şi D_2 şi care trece prin punctul $M_0\,(2,3,0)$.

8.3.5 Să se găsească ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie a planelor:

$$(P)\ 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \quad (P')\ x - 2y + z + 3 = 0.$$

R: Rezolvând sistemul format din ecuaţiile celor două plane se obţine reprezentarea parametrică: $x = 27 + 9t$, $y = 15 + 5t$, $z = t$, $t \in \mathbf{R}$. Prin eliminarea parametrului t obţinem ecuaţiile canonice:

$$\frac{x-27}{9} = \frac{y-15}{5} = \frac{z}{1}.$$

8.3.6 Să se determine unghiul dintre dreptele:

$$(D) \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - 2y + z + 1 = 0, \end{cases} \quad (D') \begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

8.3.7 Să se găsească ecuaţiile canonice ale dreptei care trece prin punctele

$$M_0(-1,3,1),\ M_1(1,1,5).$$

R: Din $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)=\mathbf{0}$, obţinem:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{4}.$$

8.3.8 Să se determine ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul $M_0\,(1,1,-2)$ şi sunt paralele cu dreptele:

$$1)\ (D)\ \frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{4}.\ 2)\ (D)\ \begin{cases} x-y-3z+2=0,\\ 2x-y+2z-3=0.\end{cases}$$

8.3.9 Să se calculeze unghiurile dintre muchiile opuse ale tetraedului cu vârfurile în punctele: $M_1(3,-1,0)$, $M_2(0,-7,3)$, $M_3(-2,1,-1)$, $M_4(3,2,6)$.

R: $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_3M_4}=0$, deci: $\overrightarrow{M_1M_2}\perp\overrightarrow{M_3M_4}$, $\overrightarrow{M_1M_3}\cdot\overrightarrow{M_4M_2}=0$, deci: $\overrightarrow{M_1M_3}\perp\overrightarrow{M_4M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_4}\cdot\overrightarrow{M_2M_3}=0$, deci: $\overrightarrow{M_1M_4}\perp\overrightarrow{M_2M_3}$.

8.3.10 Să se găsească coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $M^*\,(2,1,1)$ pe planul $(P)\ x+y+3z+5=0$.

8.3.11 Să se găsească coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $M^*\,(-1,-1,2)$ pe dreapta:

$$(D)\ x=t+2,\ y=2t-1,\ z=3t+1,\ t\in\mathbf{R}.$$

8.3.12 Să se găsească ecuaţia planului ce trece prin dreapta:

$$(D)\ x=t+1,\ y=2t-1,\ z=-t+1,\ t\in\mathbf{R}$$

şi este perpendicular pe planul $(P)\ x+y+z+2=0$.

8.3.13 Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0\,(1,1,-1)$ şi este perpendicular pe drepta:

$$1)\ (D)\ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}.\ 2)\ (D)\ \begin{cases} x-y=0,\\ x+2y-z+1=0.\end{cases}$$

8.3.14 Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0\,(1,1,-1)$ şi conţine drepta:

$$1)\ (D)\ \begin{cases} x=2t+4,\\ y=3t-2,\quad t\in\mathbf{R}.\\ z=4t-1,\end{cases}\ 2)\ (D)\ \begin{cases} 2x-y+z+1=0,\\ x+y+1=0.\end{cases}$$

8.3.15 Să se scrie ecuaţia planului care trece prin intersecţia planelor:

$$(P_1)\ 3x+2y-5=0,\ \ (P_2)\ 2x+y-3z+2=0$$

şi:

1) prin punctul $M_0\,(1,2,0)$.
2) este perpendicular pe planul $(P)\ x-y-5=0$.

8.3.16 Să se determine ecuaţiile proiecţiei dreptei D pe planul P, dacă:

$$\begin{aligned} &1)\ (D)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4},\ (P)\ x+y+z-3=0. \\ &2)\ (D)\ \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4},\ (P)\ x+6y-z-2=0. \end{aligned}$$

R: 1) Dreapta de proiecţie a dreptei D pe planul P se obţine prin intersecţia planului P cu planul Q ce conţine dreapta D şi este perpendicular pe planul P, de ecuaţie $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{v}, \mathbf{N}) = 0$, adică $(Q)\ -x+2y-z=0$.

8.3.17 Să se scrie ecuaţiile proiecţiei dreptei D pe planul P, dacă:

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} x-4y+2z-5=0, \\ 3x+3y+z-6=0, \end{array} \right. \quad (P) \left\{ \begin{array}{l} x=u+v+1, \\ y=-u+v-2, \\ z=2u. \end{array} \right.$$

8.3.18 Fie date punctele $M_1\,(2,-1,1)$, $M_2\,(4,-3,1)$. Să se găsească ecuaţia planului care trece prin mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, este paralel cu dreapta D şi perpendicular pe planul P, dacă:

$$(D)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1},\ \ (P)\ x-2y-z-1=0.$$

R: $\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, adică: $-x+3y-7z+16=0$.

8.3.19 Să se determine simetricele punctului $M^*\,(-1,2,0)$ faţă de:
1) planul $(P)\ x+2y-z+1=0$.
2) dreapta $(D)\ \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$.

8.3.20 Să se calculeze distanţa de la punctul $M^*(1,1,1)$ la dreptele:

$$1)\ (D)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{3}.\ \ 2)\ (D) \left\{ \begin{array}{l} x-y+z=0, \\ x+y-z+2=0. \end{array} \right.$$

R: 1) $(\mathbf{r}^*-\mathbf{r}_0) \times \mathbf{v} = 2\,(3\mathbf{i}-2\mathbf{k})$, $d\,(M^*, D) = 2$.

8.3.21 Să se calculeze distanţele de la punctele M^* la dreptele D, dacă:

$$1)\ M^*(3,2,4),\ (D) \left\{ \begin{array}{l} 2x+y-2z=0, \\ x+y-z+1=0. \end{array} \right.$$

$$2)\ M^*(3,-1,2),\ (D) \left\{ \begin{array}{l} 2x-y+z-4=0, \\ x+y-z+1=0. \end{array} \right.$$

R: 1) $M_0(1,-2,0)$, $\mathbf{v}(1,0,1)$, $d = 3\sqrt{2}$.

8.3.22 Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele:

$$1)\ (D)\ \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2},\ (D')\ \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}.$$
$$2)\ (D)\ \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{3},\ (D')\ \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

R: 1) Dreptele fiind paralele, putem scrie:

$$d\,(D,D') = d\,(M_0', D) = \frac{\|(\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = 9.$$

8.3.23 Să se determine ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor necoplanare:

$$(D)\ \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1},\ (D')\ \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

şi să se găsească punctele în care aceasta întâlneşte dreptele D şi D'.

R: Perpendiculara comună Δ se obţine ca dreapta de intersecţie a planelor:

$$(P)\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{v}') = 0,\ (P')\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0', \mathbf{v}', \mathbf{v} \times \mathbf{v}') = 0.$$

Dar $\mathbf{v} \times \mathbf{v}' = 4\,(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})$ şi deci:

$$(P)\ 3x - 2y - z - 6 = 0,\ (P')\ 5x + 34y - 11z - 38 = 0.$$

Un punct al dreptei Δ este $M_0\,(3,1,1)$, iar $\mathbf{v} = 28\,(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})$. Deci ecuaţiile canonice ale perpendicularei comune Δ sunt:

$$(\Delta)\ \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}.$$

Dreapta Δ întâlneşte dreptele D şi D' în punctele $A\,(7,3,9)$, $A'\,(3,1,1)$.

8.3.24 Să se determine ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor:

$$(D)\ \begin{cases} x + 4z = 1 = 0, \\ x - 4y + 9 = 0, \end{cases}\ (D')\ \begin{cases} y = 0, \\ x + 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

8.3.25 Să se calculeze distanţa dintre dreptele:

$$1)\ (D)\ \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2},\ (D')\ \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1},$$
$$2)\ (D)\ \frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-2},\ (D')\ \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5}.$$

R: 1) Distanţa dintre dreptele necoplanare

$$(D)\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v} = \mathbf{0},\ (D')\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0') \times \mathbf{v}' = \mathbf{0},$$

este dată de:

$$d(D, D') = \frac{|(\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, \mathbf{v}')|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{v}'\|}.$$

Cum

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}' = -3(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k}), \ \|\mathbf{v} \times \mathbf{v}'\| = 39, \ |(\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, \mathbf{v}')| = 507,$$

rezultă $d(D, D') = 13$.
2) $\|\mathbf{v} \times \mathbf{v}'\| = \|-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\| = 3$, $|(\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, \mathbf{v}')| = 9$, deci $d(D, D') = 3$.

8.3.26 Să se găsească ecuaţiile perpendicularei comune şi distanţa dintre dreptele:

$$(D_1) \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0}, \ (D_2) \ \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}.$$

8.3.27 Să se calculeze coordonatele punctului de intersecţie a dreptei

$$(D) \ \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$$

cu planul (P) $3x + 5y - z - 2 = 0$.

R: O reprezentare parametrică a dreptei D este:

$$x = 12 + 4t, \ y = 9 + 3t, \ z = 1 + t, \ \ t \in \mathbf{R}.$$

Inlocuind în ecuaţia planului P obţinem: $26t + 78 = 0$, de unde $t = -3$ şi deci punctul de intersecţie are coordonatele $(0, 0, -2)$.

8.3.28 Să se arate că dreapta

$$(D) \ \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$$

este paralelă cu planul (P) $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

R: $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = 0$.

8.3.29 Să se arate că dreapta

$$(D) \ \frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$$

este conţinută în planul (P): $x + 2y - 4z + 1 = 0$.

R: O reprezentare parametrică a dreptei D este:

$$x = 13 + 8t, \ y = 1 + 2t, \ z = 4 + 3t, \ \ t \in \mathbf{R},$$

care verifică ecuaţia planului P pentru orice $t \in \mathbf{R}$.

8.3.30 Să se găsească proiecţia punctului $M^*(4,-3,1)$ pe planul

$$(P)\ x+2y-z-3=0.$$

R: O reprezentare parametrică a perpendicularei în M^* pe planul P este:

$$x=4+t,\ y=-3-t,\ z=1-3t,\ \ t\in\mathbf{R}.$$

Inlocuind în ecuaţia planului P obţinem $t=3$. Prin urmare, proiecţia punctului M^* pe planul P are coordonatele $(7,-6,-8)$.

8.3.31 Să se găsească coordonatele simetricului punctului $M^*\,(1,1,1)$ faţă de planul

$$(P)\ x=1+2u+v,\ y=u-v,\ z=-u+2v,\ (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

8.3.32 Să se calculeze unghiul dintre dreapta:

$$(D)\ x-y-z=0,\ \ x+y+3z=0$$

şi planul $(P)\ x-y-z+1=0$.

R: Un vector director al dreptei D este $\mathbf{v}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, iar un vector normal la planul P este $\mathbf{N}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}.$ Atunci:

$$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}}{\|\mathbf{v}\|\ \|\mathbf{N}\|}=0,$$

deci $\theta=0$, adică $D\parallel P$.

8.3.33 Să se determine simetricul punctului $M^*(4,3,10)$ faţă de dreapta

$$(D)\ \ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}.$$

R: Dacă $M'\,(\mathbf{r}')$ este punctul de intersecţie al dreptei D cu planul P perpendicular în M^* pe dreapta D, atunci punctul $M'^*\,(\mathbf{r}'^*)$ simetricul punctului M^* faţă de dreapta D, este caracterizat de $\mathbf{r}'^*=2\mathbf{r}'-\mathbf{r}^*$. Ecuaţia planului P este $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$, adică: $2x+4y+5z-70=0$, iar $M'\,(3,6,8)$. Deci $M'^*\,(2,9,6)$.

8.3.34 *S*ă se găsească ecuaţiile simetricei dreptei D faţă de planul P, dacă:

$$(D)\ \begin{cases} x+y+z-1=0, \\ x+2y+3z+2=0, \end{cases}\quad (P)\ x+y+z=0.$$

8.3.35 Să se găsească ecuaţiile dreptei ce trece prin simetricele punctului $M^*\,(1,2,0)$ faţă de dreapta D şi faţă de planul P, dacă

$$(D)\ \ \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{2z}{1},\ \ (P)\ x+y+z+1=0.$$

8.3.36 Să se verifice că dreptele:

$$(D)\ (\mathbf{r}-3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k})=\mathbf{0},$$
$$(D')\ (\mathbf{r}-8\mathbf{i}-\mathbf{j}-6\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})=\mathbf{0}$$

sunt concurente şi să se scrie ecuaţia planului determinat de ele.

R: $(\mathbf{r}_0'-\mathbf{r}_0,\mathbf{v},\mathbf{v}')=0$ şi $\mathbf{v}\times\mathbf{v}'=-8\mathbf{i}+22\mathbf{j}-\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$. Ecuaţia planului este: $-8x+22y-z+48=0$.

8.3.37 Fie $A\,(0,0,2)$, $B\,(1,-1,1)$, $C\,(2,01)$, $D\,(1,2,1)$. Să se determine:
1) Lungimea medianei din A a triunghiului ABC.
2) Aria triunghiului ABC şi lungimea înălţimii din B.
3) Volumul tetraedului $ABCD$ şi lungimea înălţimii din D.
4) Ecuaţiile dreptei AB.
5) Ecuaţia planului ABD.
6) Coordonatele simetricului punctului D faţă de: punctul B, dreapta BC, planul ABC.
7) Ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor AB şi CD şi distanţa dintre ele.
8) Ecuaţia fasciculului de plane având planele bază ABC şi ABD.

8.4 Cilindri, conuri, conoizi

8.4.1 Să se găsească ecuaţia suprafeţei cilindrice cu generatoarele paralele cu vectorul $\mathbf{v}(2,-3,4)$ şi curbă directoare $\mathcal{C}$ de ecuaţii:

$$x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=1,\ t\in[0,2\pi]\,.$$

R: **Metoda 1.** O reprezentare parametrică a suprafeţei cilindrice este:

$$x=3\cos t+2\tau,\ y=3\sin t-3\tau,\ z=1+4\tau,(t,\tau)\in[0,2\pi]\times\mathbf{R}.$$

Eliminând parametrii t şi τ se obţine ecuaţia carteziană implicită a suprafeţei cilindrice:

$$16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz+16x-24y-26z-131=0.$$

Metoda 2. Ecuaţiile carteziene implicite ale curbei directoare $\mathcal{C}$ sunt: $x^2+y^2-9=0$, $z=1$. O dreaptă, de exemplu prin origine, paralelă cu $\mathbf{v}$ are ecuaţiile canonice:

$$(D)\ \frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{4},$$

sau ecuaţiile implicite: $3x+2y=0$, $2x-z=0$. Mulţimea tuturor dreptelor din spaţiu paralele cu dreapta D este caracterizată prin ecuaţiile:

$$(D_{\lambda\mu})\ 3x+2y=\lambda,\ 2x-z=\mu.$$

O dreaptă $D_{\lambda\mu}$ este o generatoare a suprafeţei cilindrice dacă întâlneşte curba directoare $\mathcal{C}$, deci dacă sistemul:

$$x^2+y^2-9=0,\ z=1,\ 3x+2y=\lambda,\ 2x-z=\mu$$

este compatibil. Rezolvând sistemul format din ultimele trei ecuaţii şi înlocuind în prima, obţinem condiţia de compatibilitate:

$$4\lambda^2 + 13\mu^2 - 12\lambda\mu - 12\lambda + 26\mu - 131 = 0.$$

Ecuaţia suprafeţei cilindrice se obţine prin eliminarea parametrilor λ şi μ între condiţia de compatibilitate şi ecuaţiile familiei $D_{\lambda\mu}$:

$$16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z - 131 = 0.$$

8.4.2 Să se găsească ecuaţia suprafeţei cilindrice ce trece prin curba:

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 - 25 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

şi are generatoarele:
1) paralele cu axa Ox.
2) paralele cu dreapta (D) $x - y = 0$, $z = 0$.

R: 1) Mulţimea tuturor dreptelor din spaţiu paralele cu axa Ox este caracterizată prin ecuaţiile: $(D_{\lambda\mu})$ $y = \lambda,\ z = \mu$. O dreaptă $D_{\lambda\mu}$ este o generatoare a suprafeţei cilindrice dacă întâlneşte curba directoare $\mathcal{C}$, deci dacă sistemul:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 - 25 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0,\ y = \lambda,\ z = \mu \end{cases}$$

este compatibil. Rezolvând sistemul format din ultimele trei ecuaţii şi înlocuind în prima, obţinem condiţia de compatibilitate:

$$2\lambda^2 - 2\lambda\mu + 2\mu^2 + 12\lambda - 10\mu - 3 = 0.$$

Eliminând parametrii λ şi μ între condiţia de compatibilitate şi ecuaţiile familiei $D_{\lambda\mu}$, obţinem:

$$2y^2 - 2yz + 2z^2 + 12y - 10z - 3 = 0.$$

2) Mulţimea tuturor dreptelor din spaţiu paralele cu dreapta D este caracterizată prin ecuaţiile: $(D_{\lambda\mu})$ $x - y = \lambda,\ z = \mu$. O dreaptă $D_{\lambda\mu}$ este o generatoare a suprafeţei cilindrice dacă întâlneşte curba directoare $\mathcal{C}$, deci dacă sistemul:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 - 25 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0,\ x - y = \lambda,\ z = \mu \end{cases}$$

este compatibil. Rezolvând sistemul format din ultimele trei ecuaţii şi înlocuind în prima, obţinem condiţia de compatibilitate:

$$\lambda^2 + 3\mu^2 - 8\lambda - 8\mu - 26 = 0.$$

Eliminând parametrii λ şi μ între condiţia de compatibilitate şi ecuaţiile familiei $D_{\lambda\mu}$, obţinem:

$$(x-y)^2 + 3z^2 - 8x + 8y - 8z - 26 = 0.$$

8.4.3 Să se găsească ecuaţia suprafeţei cilindrice cu generatoarele paralele cu vectorul $\mathbf{v}(1,-1,0)$ şi curbă directoare $\mathcal{C}$ de ecuaţii:

$$x^2 - 2y^2 - z = 0,\ x = 1.$$

R: O reprezentare parametrică a curbei directoare $\mathcal{C}$ este:

$$x = 1,\ y = t,\ z = 1 - 2t^2,\ \ t \in \mathbf{R}.$$

O reprezentare parametrică a suprafeţei cilindrice este:

$$x = 1 + \tau,\ y = t - \tau,\ z = 1 - 2t^2,\ (t,\tau) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},$$

sau, prin eliminarea parametrilor t şi τ, rezultă

$$2(x + y - 1)^2 + z - 1 = 0.$$

8.4.4 Să se găsească ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în origine şi curbă directoare $\mathcal{C}$ de ecuaţii:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = c,\ t \in [0, 2\pi]\,.$$

R: **Metoda 1.** O reprezentare parametrică a suprafeţei conice este:

$$x = (1+\tau)a\cos t,\ y = (1+\tau)b\sin t,\ z = (1+\tau)c,\ (t,\tau) \in [0,2\pi] \times \mathbf{R}.$$

sau, prin eliminarea parametrilor t şi τ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Metoda 2. Ecuaţiile carteziene implicite ale directoarei $\mathcal{C}$ sunt: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $z = c$. Mulţimea tuturor dreptelor prin origine sunt caracterizate prin ecuaţiile:

$$(D_{\lambda\mu})\ \ x = \lambda z,\ y = \mu z.$$

O dreaptă $D_{\lambda\mu}$ este o generatoare a suprafeţei conice dacă întâlneşte curba directoare $\mathcal{C}$, deci dacă sistemul:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,\ z = c,\ x = \lambda z,\ y = \mu z$$

este compatibil. Rezolvând sistemul format din ultimele trei ecuaţii şi înlocuind în prima, obţinem condiţia de compatibilitate:

$$\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Ecuaţia suprafeţei conice se obţine prin eliminarea parametrilor λ şi μ între condiţia de compatibilitate şi ecuaţiile familiei $D_{\lambda\mu}$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

8.4.5 Să se găsească ecuaţia conoidului cu plan director ale cărui generatoare sunt paralele cu planul (P) $x+y+z=0$, se sprijină pe dreapta (D) $x=0$, $y=0$ şi pe curba directoare $(\mathcal{C})$ $x=1$, $z=0$.

R: **Metoda 1.** Dreapta D şi curba directoare $\mathcal{C}$ admit reprezentările parametrice:

$$(D)\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=\lambda, \end{cases} \lambda\in\mathbf{R},\ \ (\mathcal{C})\begin{cases} x=1, \\ y=t, \\ z=0, \end{cases} t\in\mathbf{R}.$$

O reprezentare analitică a unei drepte care se sprijină pe D şi $\mathcal{C}$ este:

$$x=1-\tau,\ y=t-\tau t,\ z=\tau\lambda,\ \tau\in\mathbf{R}.$$

Ea este paralelă cu planul P dacă $-1-t+\lambda=0$, adică pentru $\lambda(t)=t+1$. Deci o reprezentare parametrică a conoidului este:

$$x=1-\tau,\ y=t-\tau t,\ z=(t+1)\,\tau,\ (t,\tau)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}.$$

Prin eliminarea parametrilor t şi τ se obţine:

$$x^2+xy+xz-x-y=0.$$

Metoda 2. Mulţimea tuturor dreptelor care se sprijină pe dreapta D şi sunt paralele cu planul P au ecuaţiile:

$$y=\lambda x,\ x+y+z=\mu,\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2.$$

O dreaptă din această familie întâlneşte curba $\mathcal{C}$ dacă sistemul:

$$y=\lambda x,\ x+y+z=\mu,\ x=1,\ z=0,$$

este compatibil, adică dacă: $1+\lambda+\mu=0$. Prin eliminarea parametrilor λ şi μ între condiţia de compatibilitate şi ecuaţiile familiei se obţine:

$$x^2+xy+xz-x-y=0.$$

8.4.6 Să se găsească ecuaţia conoidului cu plan director ale cărui generatoare sunt paralele cu planul (P) $z=0$, se sprijină pe dreapta (D) $x=0$, $y=0$ şi pe curba directoare:

$$(\mathcal{C})\ \ x^2-y^2-1=0,\ x^2-2z+1=0.$$

R: **Metoda 1.** O reprezentare parametrică a curbei directoare este:

$$x=\operatorname{ch}t,\ y=\operatorname{sh}t,\ z=\frac{1}{2}(1+\operatorname{ch}^2t),\ t\in\mathbf{R},$$

iar $\mathbf{N}(0,0,1)$. Se obţine:

$$x=(1-\tau)\operatorname{ch}t,\ y=(1-\tau)\operatorname{sh}t,\ z=\frac{1}{2}(1+\operatorname{ch}^2t),\ (t,\tau)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R},$$

sau, prin eliminarea parametrilor t şi τ,

$$2z(x^2 - y^2) - 2x^2 + y^2 = 0.$$

Metoda 2. Mulţimea tuturor dreptelor care se sprijină pe dreapta D şi sunt paralele cu planul P au ecuaţiile:

$$y = \lambda x,\ z = \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

O dreaptă din această familie întâlneşte curba $\mathcal{C}$ dacă sistemul:

$$y = \lambda x,\ z = \mu,\ x^2 - y^2 - 1 = 0,\ x^2 - 2z + 1 = 0,$$

este compatibil, adică dacă: $2\mu\left(1 - \lambda^2\right) - 2 + \lambda^2 = 0$. Prin eliminarea parametrilor λ şi μ între condiţia de compatibilitate şi ecuaţiile familiei se obţine:

$$2z(x^2 - y^2) - 2x^2 + y^2 = 0.$$

8.4.7 Să se găsească ecuaţia suprafeţei generată de o dreaptă care se sprijină pe trei drepte date:

$$(D_1)\ \begin{cases} x + 2z + 2 = 0, \\ y + z = 0, \end{cases},\ (D_2)\ \begin{cases} x + z - 1 = 0, \\ y - 2 = 0, \end{cases},\ (D_3)\ x = y = z.$$

R: Ecuaţia fasciculului de plane de axă D_1 este $x + 2z + 2 = \lambda_1(y + z)$, iar a fasciculului de plane de axă D_2 este $x + z - 1 = \lambda_2(y - 2)$. Ecuaţiile unei drepte variabile care se sprijină pe dreptele D_1 şi D_2 sunt

$$(D_{\lambda_1\lambda_2})\ \begin{cases} x + 2z + 2 = \lambda_1(y + z), \\ x + z - 1 = \lambda_2(y - 2). \end{cases}$$

Dreapta $D_{\lambda_1\lambda_2}$ întâlneşte dreapta D_3 dacă $4\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1 - 8\lambda_2 + 7 = 0$, de unde

$$4x^2 + 7y^2 - 10xy - 5yz + 4xz + 8x - 10y + 2z = 0.$$

CAPITOLUL 9

CERCUL ŞI SFERA

9.1 Cercul în plan

9.1.1 Să se scrie ecuaţia unui cerc în următoarele cazuri:
1) Centrul cercului este originea şi $R = 3$.
2) Centrul cercului este în punctul $C(2, -3)$ şi $R = 7$.
3) Centrul cercului este în punctul $C(6, -8)$ şi cercul trece prin origine.
4) Centrul cercului este în punctul $C(-1, 2)$ şi cercul trece prin punctul $M_0(2, 6)$.
5) Punctele $M_1(3, 2)$ şi $M_2(-1, 6)$ sunt extremităţile unui diametru.
6) Centrul cercului este originea şi dreapta (D) $3x - 4y + 20 = 0$ este tangentă la cerc.
7) Cercul trece prin punctele $M_1(3, 1)$, $M_2(-1, 3)$ şi are centrul pe dreapta (D) $3x - y - 2 = 0$.
8) Cercul trece prin punctele $M_1(1, 1)$, $M_2(1, -1)$, $M_3(2, 0)$.
9) Cercul trece prin punctele $M_1(-1, 5)$, $M_2(-2, -2)$, $M_3(5, 5)$.

R: 1) $x^2 + y^2 = 9$. 2) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$. 3) $R = 10$. 4) $R = 5$. 5) $C(1, 4)$, $R = 2\sqrt{2}$. 6) $R = 4$. 7) $C(2, 4)$, $R = \sqrt{10}$. 8) $C(1, 0)$, $R = 1$. 9) $C(2, 1)$, $R = 5$.

9.1.2 Cercul cu centrul în punctul $C(3, -1)$ determină pe dreapta (D) $2x - 5y + 18 = 0$ o coardă de lungime 6. Să se găsească ecuaţia acestui cerc.

R: $R = \sqrt{38}$.

9.1.3 Să se găsească ecuaţiile cercurilor de rază $R = \sqrt{5}$, tangente dreptei (D) $x - 2y - 1 = 0$ în punctul $M_0(3, 1)$.

R: $C_1(4, -1)$, $C_2(2, 3)$.

9.1.4 Să se găsească ecuaţia cercului tangent dreptei (D) $2x + y - 5 = 0$ în punctul $M_0(2, 1)$ şi dreptei (D') $2x + y + 15 = 0$.

R: $R = 2\sqrt{5}$, $C(-2, -1)$.

9.1.5 Să se găsească ecuaţiile cercurilor care trec prin punctul $M_0(1,0)$ şi sunt tangente dreptelor paralele $(D)\ 2x+y+2=0$, $(D')\ 2x+y-18=0$.

R: $R=2\sqrt{5}$, $C_1(5,-2)$, $C_2\left(\frac{9}{5},\frac{22}{5}\right)$.

9.1.6 Să se găsească ecuaţia cercului cu centrul pe dreapta $(D)\ 2x+y=0$, tangent dreptelor:

$$(D_1)\ \ 4x-3y+10=0,\ \ (D_2)\ \ 4x-3y-30=0.$$

R: $R=4$, $C(1,-2)$.

9.1.7 Să se găsească ecuaţiile cercurilor tangente dreptei $(D)\ 7x-y-5=0$ în punctul $M_0(1,2)$ şi dreptei $(D')\ x+y+13=0$.

R: $C_1(-6,3)$, $R_1=5\sqrt{2}$, $C_2(29,-2)$, $R_2=20\sqrt{2}$.

9.1.8 Să se găsească ecuaţiile cercurilor care trec prin origine şi sunt tangente dreptelor secante:

$$(D)\ x+2y-9=0,\quad (D')\ 2x-y+2=0.$$

R: $C_1(2,1)$, $R_1=\sqrt{5}$, $C_2\left(\frac{22}{5},-\frac{31}{5}\right)$, $R_2^2=\frac{289}{5}$.

9.1.9 Să se găsească ecuaţiile cercurilor care au centrele pe dreapta $(D)\ 4x-5y-3=0$ şi sunt tangente dreptelor:

$$(D)\ 2x-3y-10=0,\ \ (D')\ 3x-2y+5=0.$$

R: $C_1(2,1)$, $R_1^2=\frac{81}{13}$, $C_2(-8,-7)$, $R_2^2=\frac{25}{13}$.

9.1.10 Să se găsească ecuaţiile cercurilor care trec prin punctul $M_0(-1,5)$ şi sunt tangente dreptelor secante:

$$(D)\ 3x+4y-35=0,\ \ (D')\ 4x+3y+14=0.$$

R: $C_1(2,1)$, $R_1=5$, $C_2(-\frac{202}{49},\frac{349}{49})$, $R_2^2=\frac{185}{49}$.

9.1.11 Să se găsească ecuaţiile cercurilor tangente dreptelor:

$$(D_1)\ 4x-3y=0,\ (D_2)\ 3x-4y-5=0,\ (D_3)\ 3x-4y-15=0.$$

R: $C_1\left(-\frac{10}{7},-\frac{25}{7}\right)$, $R_1=1$, $C_2\left(\frac{30}{7},\frac{5}{7}\right)$, $R_2=1$.

9.1.12 Să se găsească ecuaţiile cercurilor tangente dreptelor:

$$(D_1)\ 3x+4y-35=0,\ (D_2)\ 3x-4y-35=0,\ (D_3)\ x-1=0.$$

R: $C_1(-15,0)$, $R_1^2 = 256$, $C_2\left(\frac{35}{3},\frac{40}{3}\right)$, $R_2 = \frac{32}{3}$, $C_3(5,0)$, $R_3^2 = 16$, $C_4\left(\frac{35}{3},-\frac{40}{3}\right)$, $R_4 = \frac{32}{3}$.

9.1.13 Să se găsească ecuaţia liniei centrelor perechilor de cercuri:

$$\begin{array}{ll}
1)\ (x-3)^2+y^2=9, & (x+2)^2+(y-1)^2=1. \\
2)\ (x+2)^2+(y-1)^2=16, & (x+2)^2+(y+5)^2=25. \\
3)\ x^2+y^2-4x+6y=0, & x^2+y^2-6x=0. \\
4)\ x^2+y^2-x+2y=0, & x^2+y^2+5x+2y-1=0.
\end{array}$$

R: 1) $x+5y-3=0$. 2) $x+2=0$. 3) $3x-y-9=0$. 4) $y+1=0$.

9.1.14 Să se găsească ecuaţia diametrului cercului $(\mathcal{C})$ $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ perpendicular pe dreapta (D) $5x+2y-13=0$.

R: $2x-5y+10=0$.

9.1.15 Se dau: cercul $(\mathcal{C})$ $x^2+y^2-10x+16=0$ şi dreapta (D) $x=\ell t$, $y=mt$, $t\in\mathbf{R}$. Să se determine valorile lui ℓ şi m pentru care dreapta D este:
1) secantă cercului $\mathcal{C}$.
2) tangentă cercului $\mathcal{C}$.
3) exterioară cercului $\mathcal{C}$.

R: $\Delta(\ell,m)=\ell^2\left(9-16\frac{m^2}{\ell^2}\right)$. Deci: 1) $\left|\frac{m}{\ell}\right|<\frac{3}{4}$. 2) $\frac{m}{\ell}=\pm\frac{3}{4}$. 3) $\left|\frac{m}{\ell}\right|>\frac{3}{4}$.

9.1.16 Să se găsească coordonatele punctelor de intersecţie ale dreptei (D) $7x-y+12=0$ cu cercul $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

R: $M_1(-1,5)$, $M_2(-2,-2)$.

9.1.17 Să se găsească condiţia ca dreapta $y=mx+n$ să fie tangentă cercului $x^2+y^2=R^2$.

R: $(1+m^2)R^2=m^2$.

9.1.18 Să se găsească ecuaţia diametrului cercului $(x-1)^2+(y+1)^2=16$, care trece prin mijlocul corzii determinată de dreapta $x-2y-3=0$ pe cerc.

R: $2x+y-1=0$.

9.1.19 Să se găsească ecuaţia tangentei la cercul:
1) $x^2+y^2=5$ în punctul $M_0(-1,2)$.
2) $(x+2)^2+(y-3)^2-25=0$ în punctul $M_0(-5,7)$.

R: 1) $x-2y+5=0$. 2) $3x-4y+43=0$.

9.1.20 Punctul $M_0(x_0, y_0)$ aparţine cercului:

$$(\mathcal{C})\ \ (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0.$$

Să se găsească ecuaţiile tangentei şi normalei la cerc în punctul M_0.

R: $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-R^2 = 0$, $(y_0-b)(x-a)-(x_0-a)(y-b)-R^2 = 0$.

9.1.21 Să se găsească condiţia ca cercurile:

$$(\mathcal{C}_1)\ \ (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - R_1^2 = 0,\ \ (\mathcal{C}_2)\ \ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - R_1^2 = 0,$$

să să se taie sub un unghi drept.

R: Dacă cele două cercuri se taie sub un unghi drept în punctul $M_0(x_0, y_0)$, atunci

$$\begin{cases} (x_0-a_1)(x_0-a_2) + (y_0-b_1)(y_0-b_2) = 0, \\ (x_0-a_1)^2 + (y_0-b_1)^2 - R_1^2 = 0, \\ (x_0-a_2)^2 + (y_0-b_2)^2 - R_1^2 = 0, \end{cases}$$

de unde, prin eliminarea lui x_0 şi y_0, se obţine $(a_1-a_2)^2+(a_2-b_2)^2-(R_1^2+R_2^2) = 0$.

9.1.22 Tangentele prin punctul $M_0(2, -3)$ la cercul $(x-1)^2 + (y+5)^2 - 4 = 0$ întâlnesc cercul în punctele M_1 şi M_2. Să se găsească ecuaţia dreptei M_1M_2.

R: $x + 2y + 5 = 0$.

9.1.23 Să se găsească ecuaţiile tangentelor la cercul $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$ paralele cu dreapta $2x + y - 7 = 0$.

R: $2x + y - 1 = 0$, $2x + y + 19 = 0$.

9.1.24 Să se găsească ecuaţiile tangentelor la cercul $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$, perpendiculare pe dreapta: $x = t$, $y = -t$, $t \in \mathbf{R}$.

R: $x + y = 0$, $x + y - 4 = 0$.

9.1.25 Să se găsească ecuaţiile tangentelor la cercul $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, perpendiculare pe dreapta $x - 2y + 9 = 0$.

R: $2x + y - 5 = 0$, $2x + y + 5 = 0$.

9.1.26 Să se găsească dreptele fasciculului $(D_{\alpha\beta})$ $\alpha(x-8y+30)+\beta(x+5y-22) = 0$, care determină pe cercul $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$ o coardă de lungime $2\sqrt{3}$.

R: $C\,(1, -1)$, $R = 4$. Din $d\,(C, D_{\alpha\beta}) = \sqrt{13}$ rezultă ecuaţia: $2\alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2 = 0$, deci dreptele sunt:

$$2x - 3y + 8 = 0,\ 3x + 2y - 14 = 0.$$

9.2 Sfera

9.2.1 Să se scrie ecuaţia unei sfere în următoarele cazuri:
1) Centrul sferei este originea şi $R = 9$.
2) Centrul sferei este în punctul $C(5,-3,7)$ şi $R = 2$.
3) Sfera trece prin origine şi are centrul în punctul $C(4,-4,-2)$.
4) Centrul sferei este în punctul $C(3,-2,1)$ şi trece prin punctul $M_0(2,-1,-3)$.
5) Punctele $M_1(2,-3,5)$ şi $M_2(4,1,-3)$ sunt extremităţile unui diametru.
6) Centrul sferei este originea şi planul (P) $16x-15y-12z+75=0$ este tangentă la sferă.
7) Centrul sferei este în punctul $C(3,-5,-2)$ şi planul (P) $2x-y-3z+11=0$ este tangent la sferă.
8) Sfera trece prin punctele $M_1(3,1,-3)$, $M_2(-2,4,1)$, $M_3(-5,0,0)$ şi are centrul în planul (P) $2x+y-z+3=0$.
9) Sfera trece prin punctele:

$$M_1(1,-2,-1),\ M_2(-5,10,-1),\ M_3(4,1,11),\ M_4(-8,-2,2).$$

R: 1) $x^2+y^2+z^2=81$. 2) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=4$. 3) $R=6$, 4) $R^2=18$. 5) $C(3,-1,1)$, $R^2=21$. 6) $R=3$, 7) $R^2=56$. 8) $C(1,-2,3)$, $R=7$. 9) $C(-2,4,5)$, $R=9$.

9.2.2 Să se găsească ecuaţiile sferelor de rază $R=3$ tangente planului (P) $x+2y+2z+3=0$ în punctul $M_0(1,1,-3)$.

R: $C_1(2,3,-1)$, $C_2(0,-1,-5)$.

9.2.3 Să se calculeze raza sferei tangentă planelor paralele: (P) $3x+2y-6z=0$, (P') $3x+2y-6z+55=0$.

R: $R=5$.

9.2.4 O sferă are centrul pe dreapta: (D) $2x+4y-z-7=0$, $4x+5y+z-14=0$ şi este tangentă planelor: (P) $x+2y-2z-2=0$, (P') $x+2y-2x+4=0$. Să se găsească ecuaţia ei.

R: $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2-4=0$.

9.2.5 Să se găsească ecuaţiile parametrice ale diametrului sferei $(\mathcal{S})$ $x^2+y^2+z^2+2x-6y+z-11=0$, perpendicular pe planul (P) $5x-y+2z-17=0$.

9.2.6 Să se determine poziţia dreptei D faţă de sfera $\mathcal{S}$, dacă:

$$1)\ \begin{cases} (D)\ x=1-t,\ y=t,\ z=-1+4t,\ t\in\mathbf{R}, \\ (\mathcal{S})\ x^2+y^2+z^2-3x-7y-z=0. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} (D)\ x=5+t,\ y=t,\ z=2+t,\ t\in\mathbf{R} \\ (\mathcal{S})\ x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-2=0. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} (D)\ 2x-y+2z-12=0,\ 2x-4y-z+6=0, \\ (\mathcal{S})\ x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-43=0. \end{cases}$$

R: 1) Eliminând x, y, z, se obţine: $t^2 - t = 0$, dreapta este secantă sferei în: $M_1(1, 0, -1)$, $M_2(0, 1, 3)$. 2) $3t^2 + 6t + 11 = 0$, $\Delta = -96$, dreapta nu intersectează sfera. 3) Sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 12 = 0, \\ 2x - 4y - z + 6 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 43 = 0 \end{cases}$$

are soluţie unică: $x = 3$, $y = 2$, $z = 4$, dreapta este tangentă sferei.

9.2.7 Să se determine poziţia planului P faţă de sfera $\mathcal{S}$, dacă:

$$\begin{array}{l} 1)\ (P)\ z = 3,\ (\mathcal{S})\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 10 = 0. \\ 2)\ (P)\ y = 1,\ (\mathcal{S})\ x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z + 10 = 0. \\ 3)\ (P)\ x = 5,\ (\mathcal{S})\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0. \end{array}$$

R: 1) $C(3, -1, 5)$, $R = 5$, $d(C, P) = 2$, $d < R$, planul este secant sferei. 2) $C(-2, -1, 3)$, $R = 2$, $d(C, P) = 2$, $d = R$, planul este tangent sferei. 3) $C(1, -2, 1)$, $R = 3$, $d(C, P) = 4$, $d > R$, planul nu intersectează sfera.

9.2.8 Să se găsească coordonatele centrului şi raza cercului:

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0. \end{cases}$$

R: Perpendiculara prin centrul sferei pe plan are ecuţiile: $x = 3 + 2t$, $y = -2 - 2t$, $z = 1 - t$, care intersectează planul în punctul $C'(-1, 2, 3)$, $d(C, P) = 6$, $R' = \sqrt{R^2 - d^2} = 8$.

9.2.9 Să se găsească ecuaţiile cercului care trece prin punctele:

$$M_1(3, -1, -2), M_2(1, 1, -2), M_3(-1, 3, 0).$$

R: $(x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 - 27 = 0$, $x + y - 2 = 0$.

9.2.10 Să se scrie ecuaţia planului tangent sferei $(\mathcal{S})$ $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$, în punctul $M_0(6, -3, -2)$.

R: $6x - 3y - 2z - 49 = 0$.

9.2.11 Să se găsească ecuaţia cilindrului cu generatoarele perpendiculare pe planul

$$(P)\ x + y - 2z - 5 = 0,$$

circumscris sferei $(\mathcal{S})$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

R: O dreaptă prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, perpendiculară pe planul P, de ecuaţii parametrice: $x = x_0 + t$, $y = y_0 + t$, $z = z_0 - 2t$, este tangentă sferei $\mathcal{S}$ dacă ecuaţia $6t^2 + 2(x_0 + y_0 - 2z_0)t + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1 = 0$ are rădăcini reale egale, adică dacă $(x_0 + y_0 - 2z_0)^2 - 6(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1) = 0$. Deci ecuaţia suprafeţei este: $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz - 6 = 0$.

9.2.12 Să se demonstreze că planul (P) $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ este tangent sferei $(\mathcal{S})$ $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$. Să se calculeze coordonatele punctului de tangenţă.

R: $M_0(2, -6, 3)$.

9.2.13 Să se determine valorile lui a pentru care planul $x+y+z-a = 0$ este tangent sferei $x^2 + y^2 + z^2 - 12 = 0$.

R: $a = \pm 6$.

9.2.14 Să se scrie ecuaţia planului tangent sferei $(\mathcal{S})$ $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2-24 = 0$, în punctul $M_0(-1, 3, 0)$.

R: $2x - y - z + 5 = 0$.

9.2.15 Să se găsească ecuaţiile planelor tangente sferei $(\mathcal{S})$ $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 - 25 = 0$, paralele cu planul (P) $4x + 3z - 17 = 0$.

R: $4x + 3z - 40 = 0$, $4x + 3z + 10 = 0$.

9.2.16 Să se găsească ecuaţiile planelor tangente sferei $(\mathcal{S})$ $x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z - 113 = 0$, paralele cu dreptele:

$$(D)\ \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}, \quad (D')\ \frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-8}{0}.$$

R: $\mathbf{N} = \mathbf{v} \times \mathbf{v}' = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $4x + 6y + 5z - 103 = 0$, $4x + 6y + 5z + 205 = 0$.

9.2.17 Să se scrie ecuaţia planului care trece prin intersecţia sferelor:

$$\begin{array}{l} (\mathcal{S}_1)\ 2(x^2 + y^2 + z^2) + 3x - 2y + z - 5 = 0, \\ (\mathcal{S}_2)\ x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + 1 = 0. \end{array}$$

R: Scăzând ecuaţia a doua înmulţită cu 2 din prima ecuaţie, obţinem: $5x - 8y + 5z - 7 = 0$.

9.3 Suprafeţe de rotaţie

9.3.1 Să se găsească ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotirea dreptei (D) $x = a$, $y = t$, $z = -t$, în jurul axei Oz.

R: **Metoda 1.** Ecuaţia suprafeţei se obţine prin eliminarea parametrului t între ecuaţiile:

$$\begin{cases} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 - (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2 = 0, \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) = 0, \end{cases}$$

cu $\mathbf{r}(t) = a\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{k}$. Se obţine sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - (2t^2 + a^2) = 0, \\ z + t = 0, \end{cases}$$

de unde: $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$.

Metoda 2. Ecuaţiile axei de rotaţie se pot scrie sub forma:

$$(\Delta)\ \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1},$$

iar ecuaţiile curbei $\mathcal{C}$, în cazul nostru ale dreptei D:

$$(\mathcal{C})\ x = a,\ y + z = 0.$$

Mulţimea tuturor cercurilor din spaţiu care au centrele pe axa Δ şi sunt situate în plane perpendiculare pe Δ sunt caracterizate prin ecuaţiile:

$$(\mathcal{C}_{\lambda\mu})\ x^2 + y^2 + z^2 = \lambda,\ z = \mu.$$

Un cerc din această familie este o generatoare a suprafeţei de rotaţie dacă întâlneşte curba $\mathcal{C}$, deci dacă sistemul:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda,\ z = \mu,\ x = a,\ y + z = 0$$

este compatibil. Rezolvând subsistemul format din ultimele trei ecuaţii şi înlocuind soluţia obţinută în prima ecuaţie, găsim condiţia de compatibilitate:

$$\lambda - 2\mu^2 - a^2 = 0.$$

Prin eliminarea parametrilor λ şi μ între condiţia de compatibilitate şi ecuaţiile familiei $(\mathcal{C}_{\lambda\mu})$ obţinem ecuaţia suprafeţei de rotaţie: $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$.

9.3.2 Să se găsească ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotirea dreptei (D) $x = 2 + 3t$, $y = 2t$, $z = t$, în jurul axei Ox.

R: $5(x-2)^2 - 9(y^2 + z^2) = 0$.

9.3.3 Să se găsească ecuaţia suprafeţei de rotaţie generată prin rotirea parabolei $y^2 - 2x = 0$, $z = 0$, în jurul axei Ox.

R: $y^2 + z^2 = 2x$.

9.3.4 Să se găsească ecuaţia suprafeţei de rotaţie generată prin rotirea curbei

$$2x - y = 0,\quad x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

în jurul dreptei

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

9.3.5 Să se găsească ecuaţia suprafeţei de rotaţie generată prin rotirea cercului

$$(x-a)^2 + z^2 - b^2 = 0,\quad y = 0,\quad a > b,$$

în jurul axei Oz.

R: Se obţine torul: $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$.

CAPITOLUL 10

CONICE ŞI CUADRICE

10.1 Conice

10.1.1 Fie F şi F' două puncte în plan, $d(F', F) = 2c$.

1) Să se arate că locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanţelor lor la cele două puncte fixe este o constantă $2a$ ($a > c$) este elipsa de semiaxe a şi $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Punctele F şi F' se numesc focarele elipsei.

2) Să se arate că pentru fiecare din cele două focare F şi F' există câte o dreaptă, (D) şi respectiv (D'), perpendiculară pe dreapta $F'F$ cu proprietatea că, pentru orice punct M al elipsei:

$$\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = \frac{d(M,F')}{d(M,D')} = \frac{c}{a} = e < 1.$$

Dreptele (D) şi (D') se numesc directoare corespunzătoare focarelor F şi F'.

3) Să se arate că razele focale $r = d(M,F)$, $r' = d(M,F')$ în punctul M sunt date de: $r = a - ex$, $r' = a + ex$.

R: 1) Alegem dreapta $F'F$ ca axă Ox şi perpendiculara în mijlocul O al segmentului $[F'F]$ ca axă Oy. Atunci condiţia din enunţ $d(M,F) + d(M,F') = 2a$, se scrie

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

care prin raţionalizare dă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2) Din

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right) \text{ şi } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} + x\right)$$

rezultă relaţiile din enunţ. 3) Rezultă din 2) cu $\dfrac{c}{a} = e$.

10.1.2 Se dă elipsa (E) $9x^2 + 25y^2 = 225$. Să se găsească: 1) semiaxele, 2) focarele, 3) excentricitatea, 4) ecuaţiile directoarelor.

R: 1) $a = 5$, $b = 3$, 2) $c^2 = a^2 - b^2$, $F(4,0)$, $F'(-4,0)$, 3) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$, 4) $d = \dfrac{a^2}{c}$, $x = \pm\dfrac{25}{4}$ (Fig. 10.1, Anexa 1).

10.1.3 Să se găsească ecuaţia elipsei de semiaxe a şi b şi centru $C(x_0, y_0)$, ştiind că axele de simetrie ale elipsei sunt paralele cu axele de coordonate.

R: Fie $\mathcal{R}' = \{C, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, atunci $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$ şi ecuaţia elipsei în reperul $\mathcal{R}'$ este

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \text{ şi deci } \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

10.1.4 Să se verifice că fiecare dintre ecuaţiile următoare reprezintă o elipsă şi să se găsească coordonatele centrului, semiaxele, excentricitatea, cât şi ecuaţiile directoarelor:

1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0.$
2) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0.$
3) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0.$

R: Avem:
1) $C(3, -1)$, $a = 3$ şi $b = \sqrt{5}$, $e = \dfrac{2}{3}$, $2x - 15 = 0$, $2x + 3 = 0$.
2) $C(1, -2)$, $a = 5$ şi $b = 4$, $e = \dfrac{3}{5}$, $3x - 220 = 0$, $3x + 28 = 0$.
3) $C(1, -2)$, $a = 2\sqrt{3}$ şi $b = 4$, $e = \dfrac{1}{2}$, $y = 6$, $y + 10 = 0$.

10.1.5 Să se găsească ecuaţia elipsei de excentricitate $e = \dfrac{2}{3}$, dacă unul dintre focare este $F(2, 1)$ iar directoarea corespunzătoare are ecuaţia $(D)\ x - 5 = 0$.

R: $d(M, F) = e\, d(M, D)$ dă: $5x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 55 = 0$.

10.1.6 Să se găsească ecuaţia elipsei de excentricitate $e = \dfrac{1}{2}$, dacă unul dintre focare este $F(3, 0)$ iar directoarea corespunzătoare are ecuaţia $(D)\ x + y - 1 = 0$.

R: $d(M, F) = e\, d(M, D)$ dă: $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$.

10.1.7 Să se găsească punctele de intersecţie ale elipsei E cu dreapta D, dacă:

1) $(E)\ x^2 + 4y^2 = 25$, $(D)\ x + 2y - 7 = 0$.
2) $(E)\ 4x^2 + 25y^2 = 100$, $(D)\ 3x + 10y - 25 = 0$.
3) $(E)\ 9x^2 + 16y^2 = 144$, $(D)\ 3x - 4y - 40 = 0$.

R: 1) $M_1\left(4, \dfrac{3}{2}\right)$, $M_2(3, 2)$. 2) dreapta D este tangentă în punctul $M_0\left(3, \dfrac{8}{5}\right)$. 3) dreapta D este exterioară elipsei E.

10.1.8 Să se determine valorile lui $\lambda \in \mathbf{R}$ pentru care dreapta (D) $y = mx + \lambda$ este tangentă elipsei

$$(E)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Să se scrie ecuaţiile acestor tangente.

R: $\lambda^2 = m^2a^2 + b^2$, $y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 + b^2}$.

10.1.9 Să se găsească ecuaţia tangentei la elipsa E, prin punctul $M_0(x_0, y_0) \in E$, dacă

$$(E)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

R: $y - y_0 = m(x - x_0)$, sau $y = mx + \lambda$, cu $\lambda = y_0 - mx_0$. Din problema precedentă rezultă $(y_0 - mx_0)^2 = m^2a^2 + b^2$ şi cum $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$, găsim

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0.$$

10.1.10 Să se arate că prin orice punct $M_0(x_0, y_0)$ exterior elipsei

$$(E)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

se pot duce două tangente la elipsă. Să se găsească ecuaţia dreptei ce trece prin punctele de contact.

R: Dreapta $y - y_0 = m(x - x_0)$ este tangentă elipsei dacă

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 > 0.$$

Dreapta contactelor are ecuaţia:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0.$$

Ea este numită *polara* punctului M_0 faţă de elipsa E.

10.1.11 Să se găsească ecuaţia tangentei în punctul $M_0\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ la elipsa

$$(E)\ \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

R: Fie (D) $x = \frac{10}{3} + \ell t$, $y = \frac{5}{3} + mt$, $\left(\frac{1}{20}\ell^2 + \frac{1}{5}m^2\right)t^2 + \left(\frac{1}{3}\ell + \frac{2}{3}m\right)t + \frac{1}{9} = 0$, $\Delta = 0$ implică $5\ell^2 + 25\ell m + 20m^2 = 0$, cu soluţiile: $m = -\frac{1}{4}\ell, m = -\ell$, de unde: $x + y - 5 = 0$, $x + 4y - 10 = 0$.

10.1.12 Extremităţile segmentului $[AB]$, cu $d(A,B) = d$, alunecă pe două drepte perpendiculare. Să se găsească locul geometric al punctului M care împarte segmentul orientat $\overline{AB}$ în raportul $k > 0$: $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$.

R: Elipsa de semiaxe $a = \dfrac{d}{1+k}$, $b = \dfrac{kd}{1+k}$.

10.1.13 Fie F şi F' două puncte în plan, $d(F', F) = 2c$.

1) Să se arate că locul geometric al punctelor din plan pentru care modulul diferenţei distanţelor lor la cele două puncte fixe este o constantă $2a$ $(a < c)$ este hiperbola de semiaxe a şi $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Punctele F şi F' se numesc focarele hiperbolei.

2) Să se arate că pentru fiecare din cele două focare F şi F' există câte o dreaptă, (D) şi respectiv (D'), perpendiculară pe dreapta $F'F$ cu proprietatea că, pentru orice punct M al hiperbolei:

$$\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = \frac{d(M,F')}{d(M,D')} = \frac{c}{a} = e > 1.$$

Dreptele (D) şi (D') se numesc directoare corespunzătoare focarelor F şi F'.

R: 1) Alegem dreapta $F'F$ ca axă Ox şi perpendiculara în mijlocul O al segmentului $[F'F]$ ca axă Oy. Atunci condiţia din enunţ

$$|d(M,F) - d(M,F')| = 2a,$$

se scrie

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

care prin raţionalizare dă

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2) La fel ca la elipsă.

10.1.14 Se dă hiperbola: (H) $9x^2 - 16y^2 = 144$. Să se găsească: 1) semiaxele a şi b, 2) focarele, 3) excentricitatea, 4) ecuaţiile directoarelor.

R: 1) $a = 4$, $b = 3$, 2) $F(5,0)$, $F'(-5,0)$, 3) $e = \dfrac{5}{4}$, 4) $x = \pm\dfrac{16}{5}$ (Fig. 10.2, Anexa 1).

10.1.15 Fie hiperbola:

$$(H)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

şi M_λ, cu $|\lambda| > a$, un punct al hiperbolei H de abscisă λ. Să se arate că pentru oricare din dreptele (D) $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, avem:

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} d(M_\lambda, D) = 0.$$

Dreptele D se numesc atunci *asimptote* ale hiperbolei H.

R: Intr-adevăr,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} d(M_\lambda, D) = \lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{b\left|\lambda - \sqrt{\lambda^2 - a^2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

10.1.16 Să se găsească ecuaţia hiperbolei de semiaxe a şi b şi centru $C(x_0, y_0)$, ştiind că axele de simetrie ale hiperbolei sunt paralele cu axele de coordonate.

10.1.17 Să se verifice că fiecare din ecuaţiile următoare reprezintă o hiperbolă şi să se găsească coordonatele centrului C, semiaxele a şi b, excentricitatea, ecuaţiile directoarelor şi asimptotelor:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0.$
2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0.$
3) $16x^2 - 9y^2 64x - 18y + 199 = 0.$

R: Avem:

1) $C(2, -3)$, $a = 3$, $b = 4$, $e = \frac{5}{3}$, ecuaţiile directoarelor: $5x - 1 = 0$, $5x - 19 = 0$, ecuaţiile asimptotelor: $4x - 3y - 17 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$.

2) $C(-5, 1)$, $a = 8$, $b = 6$, $e = 1,25$, ecuaţiile directoarelor: $x = -11,4$, $x = 1,4$, ecuaţiile asimptotelor: $3x + 4y + 11 = 0$, $3x - 4y + 19 = 0$.

3) $C(2, -1)$, $a = 3$, $b = 4$, $e = 1,25$, ecuaţiile directoarelor: $y = -4,2$, $y = 2,2$, ecuaţiile asimptotelor: $4x + 3y - 5 = 0$, $4x - 3y - 11 = 0$.

10.1.18 Să se găsească ecuaţia unei hiperbole dacă se cunoaşte excentricitatea $e = \frac{5}{4}$, unul din focare $F(5, 0)$ şi ecuaţia directoarei corespunzătoare acestui focar

$$(D)\ 5x - 16 = 0.$$

R: Din $d(M, F) = e\, d(M, D)$ sau din $\frac{c}{a} = e$, se obţine: $a = 4$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 3$.

10.1.19 Să se găsească ecuaţia unei hiperbole dacă se cunoaşte excentricitatea $e = \sqrt{5}$, unul din focare $F(2, -3)$ şi ecuaţia directoarei corespunzătoare acestui focar

$$(D)\ 3x - y + 3 = 0.$$

R: Din $d(M, F) = e\, d(M, D)$ se obţine: $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$.

10.1.20 Să se găsească punctele de intersecţie ale hiperbolei H cu dreapta D, dacă:

1) $(H)\ \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1,\quad (D)\ 2x - y - 10 = 0.$
2) $(H)\ \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1,\quad (D)\ 4x - 3y - 16 = 0.$
3) $(H)\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,\quad (D)\ 2x - y + 1 = 0.$

R: 1) $M_1(6,2)$, $M_2\left(\dfrac{14}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$. 2) dreapta D este tangentă în punctul $M_0\left(\dfrac{25}{4},3\right)$. 3) dreapta D este exterioară hiperbolei H.

10.1.21 Să se determine valorile lui $\lambda \in \mathbf{R}$ pentru care dreapta $y = mx + \lambda$ este tangentă hiperbolei

$$(H)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Să se scrie ecuaţiile acestor tangente.

R: $\lambda^2 = m^2a^2 - b^2$, $y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 - b^2}$, cu $|m| > \dfrac{b}{a}$.

10.1.22 Să se găsească ecuaţia tangentei la hiperbola H prin punctul $M_0(x_0, y_0) \in H$, dacă

$$(H)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

R: Luăm $(D)\ x = x_0 + \ell t$, $y = y_0 + mt$. Deoarece $M_0 \in H$, rezultă

$$\left(\frac{\ell^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{\ell x_0}{a^2} - \frac{my_0}{b^2}\right)t = 0.$$

Dreapta este tangentă dacă $t_1 = t_2 = 0$, care dă $\ell x_0 b^2 = my_0a^2$, de unde ecuaţia tangentei:

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0.$$

10.1.23 Să se găsească ecuaţiile tangentelor la hiperbola H paralele cu dreapta D, dacă:

$$(H)\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1,\ (D)\ 10x - 3y + 9 = 0.$$

R: $(D_1)\ 10x - 3y - 32 = 0$, $(D_2)\ 10x - 3y + 32 = 0$.

10.1.24 Să se găsească ecuaţiile tangentelor la hiperbola $(H)\ x^2 - y^2 = 16$ care trec prin punctul $M_0(-1, 7)$.

R: $(D_1)\ 5x - 3y - 16 = 0$, $(D_2)\ 13x + 5y + 48 = 0$.

10.1.25 O hiperbolă trece prin punctul $M_0(\sqrt{6}, 3)$ şi este tangentă dreptei $(D)\ 9x + 2y - 15 = 0$. Să se găsească ecuaţia acestei hiperbole ştiind că axele sale de simetrie coincid cu axele de coordonate.

R: Se obţine:

$$(H_1)\ \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{45} = 1, \quad (H_2)\ \frac{3x^2}{10} - \frac{4y^2}{45} = 1.$$

10.1.26 Fie D o dreaptă în plan şi F un punct, $d(F, D) = p$. Să se arate că locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de dreapta D, numită directoare, şi punctul F, numit focar, este o parabolă de parametru p.

R: Alegem drept axă Ox perpendiculara în F pe dreapta D, iar ca axă Oy perpendiculara pe Ox în mijlocul O al distanţei de la D la F. Atunci: $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, iar $(D)\ x+\frac{p}{2}=0$. Din $d(M,F)=d(M,D)$, rezultă ecuaţia $y^2=2px$.

10.1.27 Să se găsească coordonatele focarului F şi ecuaţia directoarei D ale parabolei $y^2=4x$.

R: $F(1,0)$, $(D)\ x+1=0$ (Fig. 10.3, Anexa 1).

10.1.28 Să se găsească ecuaţia unei parabole cu vârful în punctul $M_0(x_0,y_0)$, de parametru p, cu axa de simetrie paralelă cu axa Ox.

R: Fie $\mathcal{R}'=\{M_0,\mathbf{i},\mathbf{j}\}$. Atunci $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{r}'$ şi din $y'^2=2px'$ obţinem $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.

10.1.29 Să se arate că fiecare din ecuaţiile următoare defineşte o parabolă şi să se determine coordonatele vârfului, parametrul p şi ecuaţia directoarei:

$$\begin{array}{lll} 1)\ y^2=4x-8. & 2)\ y^2=-6x+4. & 3)\ x^2=6y+2. \\ 4)\ x^2=2-y. & 5)\ y=\frac{1}{4}x^2+x+2 & 6)\ x=2y^2-12y+14. \end{array}$$

R: 1) $M_0(2,0)$, $p=2$, $x+1=0$. 2) $M_0\left(\frac{2}{3},0\right)$, $p=3$, $6x-13=0$.
3) $M_0(0,-\frac{1}{3})$, $p=3$, $6y+11=0$. 4) $M_0(0,2)$, $p=\frac{1}{2}$, $4y-9=0$.
5) $M_0(-2,1)$, $p=2$, $y=0$. 6) $M_0(-4,3)$, $p=\frac{1}{4}$, $8x+33=0$.

10.1.30 Să se arate că ecuaţia $(DS)\ x^2-4y^2=0$, defineşte o pereche de drepte secante.

R: Ecuaţia se mai scrie: $(x-2y)(x+2y)=0$ (Fig. 10.4, Anexa 1)..

10.1.31 Focarul F' şi directoarea corespunzătoare D' ale unei elipse de semiaxe a şi b sunt fixe, în timp ce distanţa $d(F',F)=2c$ variază, $c\in(0,\infty)$. Să se cerceteze variaţia cu c a excentricităţii acestei elipse şi a vârfurilor A şi A'. Să se arate că pentru $c\to\infty$ elipsa devine o parabolă de parametru $p=d(F',D')$.

R: Fie $p=d(F',D')=\frac{a^2}{c}-c=\frac{a^2-c^2}{c}=\frac{b^2}{c}$, deci $b^2=pc$, cu $p=\text{const}$, iar $a^2=c\,(p+c)$. Rezultă că

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c}{c+p}}.$$

Fie P intersecţia directoarei D' cu axa Ox. Avem că:

$$d(P,A')=\frac{a^2}{c}-a=p+c-\sqrt{c(p+c)},\quad d(P,A)=\frac{a^2}{c}+a=p+c+\sqrt{c(p+c)}.$$

Atunci:

$$\lim_{c\to\infty} e(c) = 1, \quad \lim_{c\to\infty} d(P, A') = \frac{p}{2}, \quad \lim_{c\to\infty} d(P, A) = \infty.$$

Alegem un reper ortonormat cu axa Ox perpendiculară în F' pe D' şi originea O la mijlocul distanţei între F' şi D'. Atunci $C\left(c + \frac{p}{2}, 0\right)$. Ecuaţia elipsei cu centrul în punctul C se scrie:

$$\frac{\left(x - c - \frac{p}{2}\right)^2}{c(c+p)} + \frac{y^2}{cp} - 1 = 0 \text{ sau } \frac{y^2}{p} = \frac{2cx}{c+p} - \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2}{c+p}.$$

La limită, pentru $c \to \infty$, se obţine de aici: $y^2 = 2px$.

10.2 Cuadrice

10.2.1 Să se verifice că planul $z = \lambda$, $\lambda \in (-1, 1)$, intersectează elipsoidul

$$(E)\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$$

după o elipsă. Să se găsească semiaxele sale.

R: $a = 3\sqrt{1-\lambda^2}$, $b = 2\sqrt{1-\lambda^2}$ (Fig. 10.5, Anexa 2).

10.2.2 Să se verifice că planul $x - 2 = 0$ intersectează elipsoidul

$$(E)\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

după o elipsă. Să se găsească semiaxele şi vârfurile sale.

R: $b = 3$, $c = \sqrt{3}$, $B(2, 3, 0)$, $B'(2, -3, 0)$, $C(2, 0, \sqrt{3})$, $C'(2, 0, -\sqrt{3})$.

10.2.3 Să se verifice că planul $z - 2 = 0$ intersectează hiperboloidul cu o pânză

$$(H_1)\ x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

după un cerc. Să se găsească raza şi centrul său.

R: $R = \sqrt{2}$, $C\,(0, 0, 2)$ (Fig. 10.6, Anexa 2).

10.2.4 Să se verifice că planul $z - 1 = 0$ intersectează hiperboloidul cu o pânză

$$(H_1)\ \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} - 1 = 0$$

după o hiperbolă. Să se găsească semiaxele şi vârfurile sale.

R: $a = 4$, $b = 3$, $A(4, 0, 1)$, $A'(-4, 0, 1)$.

10.2.5 Să se verifice că planul $z = \lambda$, $\lambda \in (-1, 1)$, nu intersectează hiperboloidul cu două pânze

$$(H_2) \ \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - z^2 + 1 = 0.$$

R: Ecuaţia $x^2 + y^2 + 4\left(1 - \lambda^2\right) = 0$ nu are soluţii pentru $\lambda \in (-1, 1)$ (Fig. 10.7, Anexa 2).

10.2.6 Să se verifice că planul $z = \lambda^2$, $\lambda > 0$, intersectează paraboloidul eliptic (PE) $x^2 + y^2 = z$ după un cerc. Să se găsească raza şi centrul său.

R: $R = \lambda$, $C\,(0, 0, \lambda)$ (Fig. 10.8, Anexa 2).

10.2.7 Să se verifice că planul $z = 0$, intersectează paraboloidul eliptic (PH) $x^2 - y^2 = z$ după două drepte concurente.

R: $x - y = 0$, $x + y = 0$ (Fig. 10.9, Anexa 2).

10.2.8 Să se verifice că planul $y + 6 = 0$ intersectează paraboloidul hiperbolic

$$(PH) \ \ \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$$

după o parabolă. Să se găsească parametrul şi vârful ei.

R: $p = 15$, $V\left(0, -6, -\dfrac{3}{2}\right)$.

10.2.9 Să se găsească ecuaţiile proiecţiilor intersecţiei paraboloidului eliptic (PE) $y^2 + z^2 = x$ cu planul (P) $x + 2y - z = 0$ pe planele de coordonate.

R: Pe Oxy: $x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0$, $z = 0$; pe Oyz: $y^2 + z^2 + 2y - z = 0$, $x = 0$; pe Oxz: $x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0$, $y = 0$.

10.2.10 Ce curbă rezultă din intersecţia elipsoidului

$$(E) \ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0$$

cu planul (P) $2x - 3y - 7 = 0$. Să se găsească centrul său.

R: Se cercetează proiecţiile intersecţiei pe planele de coordonate. Eliminând succesiv x, y între cele două ecuaţii se obţin doi cilindrii pătratici eliptici. Deci intersecţia este o elipsă. Centrul elipsei se proiectează în centrul proiecţiei. Se obţine $C(2, -1, 0)$.

10.2.11 Să se găsească curba de intersecţie a paraboloidului hiperbolic (PH) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{z^2}{3} = y$ cu planul (P) $3x - 3y + 4z + 2 = 0$. Să se găsească centrul său.

R: Se procedează ca la exerciţiul precedent. Se obţine o hiperbolă cu centrul în punctul $C(1, -1, -2)$.

10.2.12 Să se demonstreze că paraboloidul eliptic (PE) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$ şi planul (P) $2x-2y-z-10=0$ au un singur punct comun. Să se determine coordonatele sale.

R: Eliminând pe y obţinem: $(2x-18)^2+(3z+6)^2=0$, de unde: $x=9$, $y=5$, $z=-2$ (planul este tangent paraboloidului).

10.2.13 Să se demonstreze că hiperboloidul cu două pânze (H_2) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}+1=0$ şi planul (P) $5x+2z+5=0$ au un singur punct comun. Să se determine coordonatele sale.

R: Se procedează ca la exerciţiul precedent. Se obţine $C(3,0,-10)$ (planul este tangent hiperboloidului).

10.2.14 Să se determine valorile lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care planul (P) $x-2y-2z+m=0$ este tangent elipsoidului (E) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}-1=0$.

R: $m=\pm 18$.

10.2.15 Să se găsească planele tangente elipsoidului (E) $4x^2+16y^2+8z^2-1=0$, paralele cu planul (P) $x-2y+2z+17=0$.

R: $x-2y+2z-1=0$, $x-2y+2z+1=0$.

10.2.16 Să se găsească punctele de intersecţie ale cuadricei Γ cu dreapta D dacă:

$$\begin{array}{ll}
1)\ (\Gamma)\ \frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}-1=0, & (D)\ \frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}.\\
2)\ (\Gamma)\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}-1=0, & (D)\ \frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}.\\
3)\ (\Gamma)\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z, & (D)\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}.\\
4)\ (\Gamma)\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z, & (D)\ \frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}.
\end{array}$$

R: 1) $M_1(3,4,-2)$, $M_2(6,-2,2)$. 2) $M_0(4,-3,2)$ (dreapta este tangentă cuadricei). 3) dreapta nu intersectează cuadrica. 4) $D\subset\Gamma$.

10.2.17 Să se arate că planul (P) $2x-12y-z+16=0$ intersectează paraboloidul hiperbolic (PH) $x^2-4y^2=2z$ după două generatoare rectilinii ale căror ecuaţii se cer.

R: Fie (D) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}$ o generatoare. Atunci $\mathbf{v}(2,1,2x_0-4y_0)$, $\mathbf{v}'(2,-1,2x_0+4y_0)$, $M_0(-2,1,0)$, $M_0'(4,2,0)\in PH\cap D$. Deci ecuaţiile celor două generatoare sunt:

$$(D)\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-8},\quad (D')\ \frac{x-4}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{16}.$$

10.2.18 Să se arate că planul (P) $4x-5y-10z-20=0$ intersectează hiperbolidul cu o pânză (H_1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}-1=0$ după două generatoare rectilinii ale căror ecuaţii se cer.

R: (D) $y+2z=0$, $x-5=0$, (D') $2x-5z=0$, $y+4=0$.

CAPITOLUL 11

CURBE ALGEBRICE DE ORDINUL AL DOILEA

11.1 Reducerea la ecuaţia canonică

11.1.1 Să se găsească ecuaţia conicei care trece prin punctele:

1) $M_0(0,0)$, $M_1(-1,0)$, $M_2(0,2)$, $M_3(-2,1)$, $M_4(-1,3)$.
2) $M_0(0,0)$, $M_1(6,0)$, $M_2(0,3)$, $M_3(2,2)$, $M_4(-2,1)$.

R: 1) $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$. 2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y = 0$.

11.1.2 Să se găsească centrele următoarelor conice:

1) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$. 2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.
3) $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$. 4) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.
5) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$. 6) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 9 = 0$.

R: 1) $C(7,5)$. 2) $C(-1,-1)$. 3) $C(0,1)$. 4) Fără centru. 5) Cu dreaptă de centre: $2x + 2y - 1 = 0$. 6) Cu dreaptă de centre: $3x - 2y = 0$.

11.1.3 Să se găsească ecuaţiile reduse la centru ale conicelor:

1) $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 40x - 32y + 5 = 0$.
2) $x^2 - 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$.
3) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$.

R: 1) $C(2,3)$, $F(2,3) = -83$, $7x'^2 + 4x'y' + 4y'^2 - 83 = 0$.
2) $C(1,2)$, $(x')^2 - 2x'y' + 4 = 0$.
3) $C(1,2)$, $6x'^2 - 4x'y' + 9y'^2 - 40 = 0$.

11.1.4 Să se găsească reperul canonic şi ecuaţia redusă a conicei de ecuaţie:

$$F(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8x - 8y + 8 = 0.$$

R: Avem $[A|B] = \begin{bmatrix} 5 & -3 & | & -4 \\ -3 & 5 & | & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$, deci $r = 2$, conica este cu centru $C(2,2)$. După translaţia de vector $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, ecuaţia conicei devine $5x'^2 - 6x'y' + 5y'^2 - 8 = 0$. Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$, iar valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători sunt:

$$\lambda_1 = 2,\ \mathbf{i}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}),\quad \lambda_2 = 8,\ \mathbf{j}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j}),$$

cu $\det C = +1$. In reperul canonic $\mathcal{R}^* = \{C, \mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*\}$ conica are ecuaţia:

$$2x^{*2} + 8y^{*2} - 8 = 0,\ \text{sau}\ \frac{x^{*2}}{4} + y^{*2} - 1 = 0$$

şi este deci o elipsă de semiaxe $a = 2$, $b = 1$ (Fig. 11.1, Anexa 1).

11.1.5 Să se găsească reperele canonice şi ecuaţiile reduse ale conicelor de ecuaţii:

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$
2) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0.$
3) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$
4) $7x^2 - 8xy + y^2 - 6x + 6y + 1 = 0.$
5) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0.$
6) $4xy + 6x - 2y - 3 = 0.$
7) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 42x - 56y - 51 = 0.$
8) $xy = 1.$

R: 1) $C(2,3)$, $F(2,3) = -36$. Ecuaţia redusă la centru: $5x'^2 + 4x'y' + 8y'^2 - 36 = 0$. Ecuaţia caracteristică: $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$, cu valoriile proprii şi vectorii proprii corespunzători:

$$\lambda_1 = 9,\ \mathbf{i}^* = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}),$$
$$\lambda_2 = 4,\ \mathbf{j}^* = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\mathbf{i}+\mathbf{j}).$$

Ecuaţia redusă este: $\dfrac{x^{*2}}{4}1 + \dfrac{y^{*2}}{9} - 1 = 0.$

2) $5x^{*2} + 10y^{*2} - 1 = 0.$

3) $\dfrac{x^{*2}}{4} - \dfrac{y^{*2}}{9} - 1 = 0$ (Fig. 11.2, Anexa 1).

4) $x^{*2} - 9y^{*2} - 1 = 0.$

5) $r = 1$, $r' = 2$, conică fără centru (parabolă). Ecuaţia caracteristică: $\lambda^2 - 25\lambda = 0$,

$$\lambda_1 = 0,\ \mathbf{i}^* = \frac{1}{5}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}),$$
$$\lambda_2 = 25,\ \mathbf{j}^* = \frac{1}{5}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}).$$

Ecuaţia în reperul $\mathcal{R}^* = \{O, \mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*\}$ este: $y^{*2} = 2x^*$ (Fig. 11.3, Anexa 1).

6) $2x^{*2} - 2y^{*2} = 0$. 7) $y^{*2} - 4 = 0$ (Fig. 11.4, Anexa 1).

11.2 Proprietăţi diametrale şi asimptotice

11.2.1 Să se găsească punctele de intersecţie cu axele de coordonate ale conicelor:

1) $x^2 + xy + 2y^2 - 7x - 12y + 10 = 0$. 2) $x^2 + 4xy - 4x - y + 4 = 0$.
3) $x^2 - 4x - y + 3 = 0$. 4) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 18y = 0$.

R: 1) $(2,0)$, $(5,0)$, $(0,1)$, $(0,5)$. 2) $(2,0)$, $(2,0)$, $(0,4)$. 3) $(1,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$. 4) $(0,0)$, $(0,2)$.

11.2.2 Să se găsească punctele de intersecţie ale conicei

$$(\Gamma)\ x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

cu dreptele:

1) $5x - y - 5 = 0$. 2) $x + 2y + 2 = 0$.
3) $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 4t, \end{cases} t \in \mathbf{R}$. 4) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = t, \end{cases} t \in \mathbf{R}$.

R: 1) $(1,0)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. 2) $(\Gamma) \cap (D) = \emptyset$. 3) $t_1 = 0$, $(1,0)$, $t_2 = -\frac{10}{13}$, $\left(\frac{23}{13}, -\frac{40}{13}\right)$. 4) $t_0 = \frac{1}{6}$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$.

11.2.3 Să se scrie ecuaţia tangentei la conica (Γ):

1) $x^2 - 4xy + 9y^2 + 2x - 14y = 0$ *în punctul* $M_0(0,0)$.
2) $2x^2 + 4xy - y^2 + 4x - 8y - 12 = 0$ *în punctul* $M_0(2,2)$.

R: 1) $M_0 \in (\Gamma)$, $x_0x - 2(x_0y + xy_0) + 9y_0y + (x + x_0) - 7(y + y_0) = 0$, deci: $x - 7y = 0$.
2) $M_0 \in (\Gamma)$, $-x + 7y - 12 = 0$.

11.2.4 Să se scrie ecuaţiile tangentelor la conica (Γ) în punctele de intersecţie cu axele de coordonate:

1) $x^2 - 5xy + 3y^2 + 5x + 3y - 6 = 0$. 2) $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$.

R: 1) $M_1(-6,0)$, $M_2(1,0)$, $-7x + 33y - 42 = 0$, $7x - 2y - 7 = 0$, $M_3(0,-2)$, $M_4(0,1)$, $15x - 9y - 18 = 0$, $y - 1 = 0$.
2) $M_1(2,0)$, $M_2(3,0)$, $-x + 4y + 2 = 0$, $x + 4y - 3 = 0$, $M_3(0,-1)$, $M_4(0,3)$, $-5x + 8y + 8 = 0$, $-5x - 8y + 24 = 0$.

11.2.5 Să se scrie ecuaţiile tangentelor din origine la conica

$$(\Gamma)\ \ 3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$$

şi să se găsească punctele de contact ale acestora cu conica.

R: Fie (D) $x = \ell t$, $y = mt$, $(3\ell^2 + 7\ell m + 5m^2)t^2 + (4\ell + 5m)t + 1 = 0$, $\Delta = 4\ell^2 + 12\ell m + 5m^2 = 0$, $\mathbf{v}_1(5, -2)$, $\mathbf{v}_2(1, 2)$, $2x + 5y = 0$, $M_1\left(-1, \dfrac{2}{5}\right)$, $2x + y = 0$, $M_2\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.

11.2.6 Să se scrie ecuaţiile tangentelor duse din punctul M_0 la conica (Γ), dacă:

$$\begin{array}{ll} 1)\ M_0(3,4), & (\Gamma)\ 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0. \\ 2)\ M_0(-2,1), & (\Gamma)\ 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0. \end{array}$$

R: 1) Fie (D) $x = \ell t + 3$, $y = mt + 4$, $(2\ell^2 - 4\ell m + m^2)t^2 - 2(3\ell - m)t + 1 = 0$, $\Delta = 7\ell^2 - 2\ell m = 0$, $\mathbf{v}_1(0, 1)$, $\mathbf{v}_2(2, 7)$, $x = 3$, $7x - 2y - 13 = 0$.
2) $M_0 \in \Gamma$, $7x + 4y + 10 = 0$.

11.2.7 Să se arate că dreptele (D_1) $7x - 8y + 1 = 0$ şi (D_2) $3x - 2y = 0$ sunt tangente la conica (Γ) $x^2 + 2xy - 4y^2 + 3x - 2y = 0$ şi să se afle punctele de contact.

R: $(D_1) \cap (\Gamma) = M_1(1, 1)$, $(D_2) \cap (\Gamma) = M_2(0, 0)$.

11.2.8 Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel ca dreapta (D) $2x - y + \lambda = 0$ să fie tangentă la conica (Γ) $x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ şi să se afle punctele de contact.

R: $y = 2x + \lambda$, $-3x^2 + 6x + \lambda^2 + 4\lambda - 3$, $\Delta = 4(3\lambda^2 + 12\lambda) = 0$, $\lambda_1 = 0$, (D_1) $2x - y = 0$, $M_1(1, 2)$, $\lambda_2 = -4$, (D_2) $2x - y - 4 = 0$, $M_2(1, -2)$.

11.2.9 Să se scrie ecuaţiile tangentelor la conica (Γ) $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ paralele cu dreapta (D) $3x + 3y - 5 = 0$. Să se afle punctele de contact.

R: Dreapta (D) $3x + 3y - \lambda = 0$ este tangentă conicei (Γ) pentru $\lambda_1 = -18$, $\lambda_2 = -2$, $M_1\left(-\dfrac{5}{3}, -\dfrac{8}{3}\right)$, $M_2(1, 0)$.

11.2.10 Să se scrie ecuaţia pătratică a tangentelor prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ la conica:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,\quad 2)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,\quad 3)\ y^2 = 2px.$$

R: Fie (D) $x = x_0 + \ell t$, $y = y_0 + mt$.
1) $\Delta = a^2b^2\left[(b^2 - y_0^2)\ell^2 + 2x_0y_0\ell m + (a^2 - x_0^2)m^2)\right] = 0$, deci:

$$(b^2 - y_0^2)(x - x_0)^2 + 2x_0y_0(x - x_0)(y - y_0) + (a^2 - x_0^2)(y - y_0)^2) = 0.$$

2) $\Delta = a^2b^2\left[(y_0^2 + b^2)\ell^2 - 2x_0y_0\ell m + (x_0^2 - a^2)m^2\right] = 0$, deci:

$$(y_0^2 + b^2)(x - x_0)^2 - 2x_0y_0(x - x_0)(y - y_0) + (x_0^2 - a^2)(y - y_0)^2 = 0.$$

3) $\Delta = p\left[p\ell^2 - 2y_0\ell m + 2x_0m^2\right] = 0$, deci:

$$p(x - x_0)^2 - 2y_0(x - x_0)(y - y_0) + 2x_0(y - y_0)^2 = 0.$$

11.2.11 Să se găsească diametrul conjugat direcţiei $\mathbf{v}\,(1,2)$ în raport cu conica:

$$2x^2 - y^2 + 4x - 1 = 0,$$

precum şi diametrul conjugat lui.

R: $\mathbf{v}\cdot U\,(\mathbf{r}) = \ell F_1(x,y) + mF_2(x,y) = 0$, $x - y + 1 = 0$, $2x - y + 2 = 0$.

11.2.12 Să se scrie ecuaţia diametrului paralel cu axa absciselor şi ecuaţia diametrului conjugat lui în raport cu conica:

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0.$$

R: $y + 1 = 0$, $4x + 5y + 3 = 0$.

11.2.13 Să se scrie ecuaţiile a doi diametri conjugaţi ai hiperbolei:

$$3x^2 - 2y^2 - 12 = 0,$$

ştiind că unghiul dintre ei este $\dfrac{\pi}{4}$.

R: $g\,(\mathbf{v},\mathbf{v}') = 0$, $\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{v}'||} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x - 2y = 0$, $3x - y = 0$ sau $x + 2y = 0$, $3x + y = 0$.

11.2.14 Să se scrie ecuaţia diametrului parabolei: $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$ care trece prin origine.

R: $\ell = 7$, $m = 6$, $x - 3y = 0$.

11.2.15 Să se găsească ecuaţiile axelor principale ale conicelor:

1) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0.$
2) $5x^2 + 24xy - 2y^2 + 4x - 1 = 0.$
3) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0.$

R: Ecuaţia unei axe principale este: $\ell F_1\,(x,y) + mF_2\,(x,y) = 0$ cu (ℓ, m) daţi de:

$$a_{12}\left(m^2 - \ell^2\right) + (a_{11} - a_{22})\,\ell m = 0.$$

1) $2x + 2y + 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

11.2.16 Să se ecrie ecuaţia axei parabolei: $x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y = 0$.

R: Ecuaţia axei unei parabole este: $a_{11}F_1\,(x,y) + a_{12}F\,(x,y) = 0$, $2x - 2y + \dfrac{3}{2} = 0$.

11.2.17 Să se raporteze la axele principale de simetrie şi să se reprezinte grafic conicele:

1) $2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0.$ 2) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0.$
3) $2xy + 3x - y - 2 = 0.$ 4) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$

11.2.18 Să se găsească ecuaţia pătratică a asimptotelor hiperbolei de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

R: Avem: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$. Adică ecuaţiile asimptotelor hiperbolei sunt $y = \pm \dfrac{b}{a} x$.

11.2.19 Să se găsească ecuaţiile asimptotelor conicelor:

1) $x^2 - 4y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$.
2) $3xy - 9x - y + 7 = 0$.
3) $2x^2 + xy - y^2 - 5x + y = 0$.
4) $x^2 - y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$.
5) $x^2 - xy - 6y^2 - x + 13y - 10 = 0$.

R: Ecuaţia unei asimptote este: $\ell F_1(x, y) + mF_2(x, y) = 0$ cu (ℓ, m) daţi de:

$$a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 = 0.$$

1) $2x + 4y - 5 = 0$, $2x - 4y + 1 = 0$.
2) $y - 3 = 0$, $3x - 1 = 0$.

CAPITOLUL 12

SUPRAFEŢE ALGEBRICE DE ORDINUL AL DOILEA

12.1 Reducerea la ecuaţia canonică

12.1.1 Să se găsească reperul canonic şi ecuaţia redusă ale cuadricei:

$$F(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0.$$

R: Avem:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

deci $r = 3$, cuadrica este cu centru $C(3, 0, -2)$. După translaţia de vector $\mathbf{r}_0 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, ecuaţia cuadricei devine

$$x'^2 + 3y'^2 + 4y'z' - 1 = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$, iar valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători sunt:

$$\lambda_1 = 1,\ \ \mathbf{i}^* = \mathbf{i},\quad \lambda_2 = 4,\ \ \mathbf{j}^* = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{j} + \mathbf{k}),\quad \lambda_3 = -1,\ \mathbf{k}^* = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{j} + 2\mathbf{k}),$$

cu $\det C = +1$. In reperul canonic $\mathcal{R}^* = \{C, \mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*\}$ cuadrica are ecuaţia:

$$x^{*2} + 4y^{*2} - z^{*2} - 1 = 0$$

şi este deci un hiperboloid cu o pânză.

12.1.2 Să se găsească reperul canonic şi ecuaţia redusă ale cuadricelor:

1) $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0$.
2) $2x^2 + 5y^2 + 11z^2 - 20xy + 4xz + 16yz - 24x - 6y - 6z - 18 = 0$.
3) $4xy - z^2 - 4x - 4y - 4 = 0$.
4) $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0$.
5) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + 2x + 2y + 4z + 2 = 0$.
6) $20x^2 + 8y^2 + 17z^2 - 8xy + 28xz - 20yz + 28x - 20y + 34z - 19 = 0$.
7) $3x^2 + z^2 - 2z + 1 = 0$.
8) $9x^2 - 4y^2 + 3z^2 - 24x - 16y - 6z + 3 = 0$.
9) $x^2 - 2xz + z^2 + 4x - 2y - 2z = 0$.

R: 1) $r = 3$, cuadrică cu centru, $C(1, 0, -1)$, $F(1, 0, -1) = -18$, ecuaţia caracteristică: $(\lambda - 3)(\lambda^2 - 15\lambda + 54) = 0$,

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3, & \mathbf{i}^* = \dfrac{1}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}), \\ \lambda_2 = 6, & \mathbf{j}^* = \dfrac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}), \\ \lambda_3 = 9, & \mathbf{k}^* = \dfrac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}), \end{cases}$$

$\det C = +1$, ecuaţia redusă: $\dfrac{x^{*2}}{6} + \dfrac{y^{*2}}{3} + \dfrac{z^{*2}}{2} = 1$, elipsoid.

2) $r = 3$, cuadrică cu centru, $C(0, -1, 1)$, $F(0, -1, 1) = -18$, ecuaţia caracteristică: $\lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + 1458 = 0$,

$$\begin{cases} \lambda_1 = 9, & \mathbf{i}^* = \dfrac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}), \\ \lambda_2 = 18, & \mathbf{j}^* = \dfrac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}), \\ \lambda_3 = -9, & \mathbf{k}^* = \dfrac{1}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}), \end{cases}$$

$\det C = +1$, ecuaţia redusă: $\dfrac{x^{*2}}{2} + y^{*2} - \dfrac{z^{*2}}{2} = 1$, hiperboloid cu o pânză.

3) $r = 3$, cuadrică cu centru, $C(1, 1, 0)$, $F(1, 1, 0) = -8$, ecuaţia caracteristică: $(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4) = 0$,

$$\lambda_1 = -2,\ \mathbf{i}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j}),\ \ \lambda_2 = -1,\ \mathbf{j}^* = \mathbf{k},\ \ \lambda_3 = 2,\ \mathbf{k}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}),$$

$\det C = +1$, ecuaţia redusă:

$$-\frac{x^{*2}}{4} - \frac{y^{*2}}{8} + \frac{z^{*2}}{4} = 1,$$

hiperboloid cu două pânze.

4) $r = 2$, $r' = 3$, cuadrică fără centru, ecuaţia caracteristică: $\lambda(\lambda^2 - 9) = 0$,

$$\lambda_1 \;=\; -3,\ \mathbf{i}^* = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}),$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= 3,\ \mathbf{j}^* = \frac{1}{3}(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}),\\ \lambda_3 &= 0,\ \mathbf{k}^* = \frac{1}{3}(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}),\end{aligned}$$

$\det C = +1$,

$$B^* = {}^tCB = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3\\ 2\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}.$$

In reperul $\mathcal{R}^* = \{O, \mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*\}$ ecuaţia cuadricei se scrie: $-3x^{*2} + 3y^{*2} - 4x^* - 2y^* + 6z^* + 8 = 0$ sau:

$$-3\left(x^* + \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y^* - \frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(z^* + \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

Luând punctul $O'\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ ca origine, obţinem ecuaţia redusă: $x'^2 - y'^2 = 2z'$, paraboloid hiperbolic.

5) $r = 3$, $C(0,0,-2)$, $4x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} - 4 = 0$, elipsoid.

6) $r = 2$, $r' = 2$, cuadrică cu dreaptă de centre: $x = t$, $y = -2t$, $z = -1 - 2t$. Alegem $C(0,0,-1)$, $F(0,0,-1) = -36$, $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 36$, $\lambda_3 = 0$,

$$C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix},$$

ecuaţia redusă: $9x^{*2} + 36y^{*2} - 36 = 0$, cilindru eliptic.

7) Ecuaţia se mai scrie: $3x^2 + (z-1)^2 = 0$. Efectuăm translaţia: $x = x'$, $y = y'$, $z = z' + 1$ şi ecuaţia devine: $3x'^2 + z'^2 = 0$, o pereche de drepte secante imaginare.

8) $r = 3$, $r' = 3$, cuadrică cu centru, $C(\frac{4}{3}, -2, 1)$, ecuaţia redusă: $9x'^2 - 4y'^2 + 3z'^2 = 0$, con real.

9) $r = 1$, $r' = 2$, cuadrică fără plan de centre, $\lambda^2(\lambda-2) = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{i}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{k})$, $\lambda_2 = 0$, $m_2 = 2$, $\mathbf{j}^* = \mathbf{j}$, $\mathbf{k}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k})$, $\det C = +1$,

$$B^* = {}^tCB = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\\ -1\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2}\\ -1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}.$$

In reperul $\mathcal{R}^* = \{O, \mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*\}$ ecuaţia cuadricei se scrie:

$$2x^{*2} + 3x^*\sqrt{2} - 2\left(y^* - \frac{\sqrt{2}}{2}z^*\right) = 0.$$

In planul Oy^*z^* efectuăm rotaţia:

$$x^{**} = x^*,\ y^{**} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(y^* - \frac{\sqrt{2}}{2}z^*\right),\ z^{**} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y^* + z^*\right)$$

şi ecuaţia devine: $2x^{**2} + 3x^{**}\sqrt{2} - y^{**}\sqrt{6} = 0$, sau:

$$2\left(x^{**} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{6}\left(y^{**} + \frac{3\sqrt{6}}{8}\right) = 0,$$

care în urma translaţiei:

$$x^{**} = x' - \frac{3}{2\sqrt{2}},\ y^{**} = y' - \frac{3\sqrt{6}}{8},\ z^{**} = z',$$

devine: $2x'^2 - y'\sqrt{6} = 0$, cilindru parabolic.

12.1.3 Să se discute după valorile parametrului real λ natura cuadricei:

$$9(\lambda+1)x^2 - 16(\lambda-3)y^2 + 36(\lambda-2)z^2 - 18(\lambda+1)x - 64(\lambda-3)y - 55\lambda + 57 = 0.$$

R: Ecuaţia se mai scrie:

$$2(\lambda+1)(x-1)^2 - 16(\lambda-3)(y+2)^2 + 36(\lambda-2)z^2 - 144 = 0,$$

sau, efectuând translaţia $x = x' + 1$, $y = y' - 2$, $z = z'$,

$$\frac{\lambda+1}{16}x'^2 - \frac{\lambda-3}{9}y'^2 + \frac{\lambda-2}{4}z'^2 = 1.$$

Natura cuadricei este precizată în tabelul care urmează:

λ	ρ_1	ρ_2	ρ_3	Cuadrica
$\lambda < -1$	$-$	$+$	$-$	Hiperboloid cu două pânze
$\lambda = -1$	0	$+$	$-$	Cilindru hiperbolic
$-1 < \lambda < 2$	$+$	$+$	$-$	Hiperboloid cu o pânză
$\lambda = 2$	$+$	$+$	0	Cilindru eliptic
$2 < \lambda < 3$	$+$	$+$	$+$	Elipsoid
$\lambda = 3$	$+$	0	$+$	Cilindru eliptic
$\lambda > 3$	$+$	$-$	$+$	Hiperboloid cu o pânză

12.1.4 Să se discute după valorile parametrului real $\alpha \in \mathbf{R}$ natura cuadricelor:

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha(xy + xz + yz) = 0.$
2) $x^2 + (\alpha+1)y^2 + \alpha z^2 + 2xy - 2yz + 2x + 2z + 4 = 0.$

R: 1) $\det A = 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = 0$, pentru: $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, $m_2 = 2$. Pentru $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1\}$, $r = 3$, cuadrică cu centru, $C(0,0,0)$. Pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$, $r = r' = 2$, cuadrică cu dreaptă de centre. Ecuaţia caracteristică: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + \frac{9}{4}\lambda = 0$, $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $m_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, ecuaţia redusă: $x^{*2} + y^{*2} = 0$. Pentru $\alpha = 1$, $r = r' = 1$, cuadrică cu plan de centre. Ecuaţia caracteristică: $\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $m_2 = 2$, ecuaţia redusă: $x^{*2} = 0$.

2) $\det A = \alpha^2 - 1 = 0$, pentru: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$. Pentru $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $r = 3$, cuadrică cu centru. Pentru $\alpha = -1$, $r = 2$, $r' = 3$, cuadrică fără centru. Ecuaţia caracteristică: $\lambda^2 - 3 = 0$, $\lambda_1 = \sqrt{3}$, $\lambda_2 = -\sqrt{3}$. Pentru $\alpha = -1$, $r = 2$, $r' = 2$, cuadrică cu dreaptă de centre. Ecuaţia caracteristică: $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$.

12.2 Proprietăţi diametrale şi asimptotice

12.2.1 Să se găsească punctele de intersecţie cu axele de coordonate ale cuadricelor:

$$1)\ x^2 + 2y^2 - z^2 + 3xy - 7xz + x + 2y - 13z - 12 = 0.$$
$$2)\ 2x^2 + 2z^2 + 6xy - 7yz + 13x - 15y - z - 15 = 0.$$
$$3)\ x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + xz - 2yz + 5x - 5y + 5z = 0$$

R: 1) $(3,0,0)$, $(-4,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,-3,0)$, $(0,0,-1)$, $(0,0,-12)$.
2) $(1,0,0)$, $\left(-\frac{15}{2},0,0\right)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,3)$, $\left(0,0,-\frac{5}{2}\right)$.
3) $(0,0,0)$, $(-5,0,0)$, $\left(0,\frac{5}{3},0\right)$, $(0,0,-5)$.

12.2.2 Să se găsească punctele de intersecţie ale cuadricei:

$$(\Sigma)\ x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 3xz + 4yz + 2x - 5y + 3z - 25 = 0,$$

cu dreapta: $(D)\ x = 1 + 3t$, $y = -2 + t$, $z = 2t$.

R: $\left\{x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{5}{2}, z = -1, t = -\frac{1}{2}\right\}$, $\{x = 37, y = 10, z = 24, t = 12\}$.

12.2.3 Să se găsească ecuaţia planului tangent în punctul $M_0\,(2,1,2)$, cuadricei:

$$(\Sigma)\ 3x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 6yz - 11 = 0.$$

R: $M_0\,(2,1,2) \in \Sigma$, $x + 3y + 3z - 11 = 0$.

12.2.4 Să se găsească ecuaţia conului cu vârful în origine, circumscris cuadricei:

$$(\Sigma)\ x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 6yz + 4x - 2y + 6z - 2 = 0.$$

R: Dreapta: $(D)\ x = \ell t$, $y = mt$, $x = nt$, este tangentă cuadricei dacă:

$$\Delta\,(\ell, m, n) = 6\ell^2 - 3m^2 + 13n^2 - 8\ell m + 4\ell n + 6mn = 0.$$

Eliminând ℓ, m, n, obţinem ecuaţia conului circumscris:

$$6x^2 - 3y^2 + 13z^2 - 8xy + 4xz + 6yz = 0.$$

12.2.5 Să se găsească ecuaţia cilindrului circumscris cuadricei:

$$(\Sigma)\ x^2 + y^2 - 2xy + 4xz - 7 = 0,$$

cu generatoarele paralele cu direcţia $\mathbf{v}\,(2, 1, 0)$.

R: Dreapta $(D)\ x = x_0 + 2t,\ y = y_0 + t,\ z = z_0$, este tangentă cuadricei dacă:

$$\Delta\,(x_0, y_0, z_0) = 16z_0^2 - 8y_0 z_0 + 4x_0 z_0 + 7 = 0.$$

Deci, ecuaţia cilindrului circumscris cuadricei este:

$$16z^2 - 8yz + 4xz + 7 = 0.$$

12.2.6 Să se găsească ecuaţia planului diametral cuadricei:

$$2x^2 + y^2 - 4xz + 6yz - 9 = 0,$$

conjugat cu direcţia $\mathbf{v}\,(2, 3, -1)$.

R: $\mathbf{v} \cdot U\,(\mathbf{r}) = \ell F_1\,(x, y, z) + mF_2\,(x, y, z) + nF_3\,(x, y, z) = 0,\ 6x + 5z + 3y = 0.$

12.2.7 Să se găsească ecuaţiile planelor principale şi ale axelor de simetrie ale cuadricei:

$$(\Sigma)\ 5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0.$$

R: Un plan principal este un plan diametral al cuadricei conjugat cu o direcţie principală $\mathbf{v}$, unde $\mathbf{v}$ este un vector propriu. Ecuaţia caracteristică: $(\lambda - 3)(\lambda^2 - 15\lambda + 54) = 0$,

$$\lambda_1 = 3,\ \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},\ \ \lambda_2 = 6,\ \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ \ \lambda_3 = 9,\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Deci:

$$(P_1)\ 2x + 2y - z - 3 = 0,\ \ (P_2)\ 2x - y + 2z = 0,\ (P_3)\ x - 2y - 2z - 3 = 0.$$

Dreapta de intersecţie a două plane principale ale cuadricei Σ este o axă a cuadricei. Deci ecuaţiile axelor sunt:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1},\ \ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2},\ \ \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-2}.$$

12.2.8 Să se găsească ecuaţia conului asimptot al cuadricei:

$$(\Sigma)\ 2x^2 + 4y^2 - z^2 - 2xy + 4yz - 1 = 0.$$

R: $\delta = -16$, $\Delta = 16$, deci $\dfrac{\Delta}{\delta} = -1$. Ecuaţia conului asimptot este:

$$2x^2 + 4y^2 - z^2 - 2xy + 4yz = 0.$$

Ecuaţia caracteristică: $(\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 3\lambda - 8\right) = 0$ are două rădăcini pozitive şi una negativă, deci conul asimptot este real.

CAPITOLUL 13

ELEMENTE DE GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ

13.1 Curbe plane

13.1.1 Să se găsească ecuaţia locului geometric al punctelor M din plan pentru care produsul distanţelor la două puncte date F_1 şi F_2, cu $d(F_1, F_2) = 2c$, este o constantă egală cu a^2 (*ovalele lui Cassini*).

R: Alegem ca axă Ox dreapta F_1F_2, originea în mijlocul segmentului $[F_1F_2]$. Atunci $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Pentru un punct oarecare al locului, $M(x, y)$, avem:

$$d(M, F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad d(M, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Prin ipoteză $d(M, F_1) \cdot d(M, F_2) = a^2$. De aici, după efectuarea calculelor, obţinem:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4.$$

Pentru $c = 0$ se obţine un cerc de rază a. Pentru $c = a$ curba se numeşte *lemniscata lui Bernoulli*: $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$. Luând $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, obţinem ecuaţia în coordonate polare a lemniscatei: $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$, cu $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

13.1.2 Se dă un cerc de diametru $||\overrightarrow{OA}|| = 2a$ şi tangenta în A. O coardă variabilă care trece prin O întâlneşte cercul în P şi tangenta în Q. Să se găsească locul geometric al punctului M de pe coardă pentru care $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$ (*cissoida lui Diocles*).

R: Fie $x = 2a$ ecuaţia tangentei în A, $y = tx$ o dreaptă variabilă prin origine şi $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ecuaţia cercului. Atunci: $Q(2a, 2at)$, $P\left(\frac{2a}{1+t^2}, \frac{2at}{1+t^2}\right)$. Dacă

$M(x,y)$ este un punct curent al locului, scriind că $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$, găsim:

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2},\ y = \frac{2at^3}{1+t^2},\ \ t \in \mathbf{R}.$$

Ecuaţia implicită a curbei este $x(x^2+y^2) = 2ay^2$ (Fig. 13.1, Anexa 3).

13.1.3 Dreapta $x = a$ întâlneşte axa Ox în punctul A şi o dreaptă oarecare prin O în B. Pe dreapta OB se iau de o parte şi de alta a lui B segmentele $[BM_1]$ şi $[BM_2]$ a.î. $d(B,M_1) = d(B,M_2) = d(A,B)$. Să se găsească locul geometric al punctelor M_1 şi M_2. Să se dea o reprezentare parametrică a curbei loc geometric (*strofoida*).

R: Fie $A(a,0)$, $B(a,\lambda)$. Punctele M_1, M_2, A aparţin cercului cu centrul în B şi rază λ, de ecuaţie: $(x-a)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2$. Dreapta (AB) are ecuaţia: $y = \dfrac{\lambda}{a}x$. Eliminând pe λ obţinem ecuaţia implicită a locului: $x(x-a)^2 - (2a-x)y^2 = 0$. Ecuaţia explicită a curbei este:

$$y = \pm\sqrt{\frac{x(x-a)^2}{2a-x}},\quad x \in [0,2a).$$

Punând $\dfrac{y}{x-a} = t$, obţinem reprezentarea parametrică:

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2},\ y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2},\ \ t \in \mathbf{R}$$

(Fig. 13.2, Anexa 3).

13.1.4 Extremităţile segmentului $[AB]$ de lungime a alunecă pe axele Ox şi Oy perpendiculare. Paralelele la axe prin A şi B se întâlnesc în C. Din C se coboară perpendiculara CM pe AB, $M \in AB$. Să se găsească locul geometric al punctului M (*astroida*).

R: Fie $A(\lambda,0)$, $B(0,\mu)$ cu $\lambda^2+\mu^2 = a^2$. Atunci: $(AB)\ \dfrac{x}{\lambda} + \dfrac{y}{\mu} - 1 = 0$ sau $\mu x + \lambda y - \lambda\mu = 0$. Cum $C(\lambda,\mu)$ şi $\mathbf{v} = \mathbf{N}(\lambda,-\mu)$ rezultă: $(CM)\ \lambda(x-\lambda) - \mu(y-\mu) = 0$. Luând: $\lambda = a\cos t$, $\mu = a\sin t$, obţinem reprezentarea parametrică a curbei:

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ \ t \in [0,2\pi).$$

Eliminând parametrul t se găseşte ecuaţia implicită: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (Fig. 13.3, Anexa 3).

13.1.5 Un cerc $\mathcal{C}(C,R)$ se rostogoleşte fără alunecare pe axa Ox, adică $||\overrightarrow{OI}|| = \lg\operatorname{arc} IM$ (I fiind punctul de contact). Să se găsească locul geometric al unui punct M invariabil legat de acest cerc (*cicloida*).

R: Fie t unghiul dintre $\overrightarrow{CI}$ şi $\overrightarrow{CM}$. Atunci: $x_I = \lg\operatorname{arc} OI = Rt$ şi: $x = x_I - R\sin t$, $y = R - R\cos t$. Se obţine:

$$\mathbf{r} = R(t-\sin t)\mathbf{i} + R(1-\cos t)\mathbf{j},\ \ t \in \mathbf{R}.$$

13.1.6 Se dau: un cerc cu centrul în punctul C şi rază $d(O,C) = 2a$ şi mediatoarea segmentului $[OC]$. O coardă variabilă care trece prin O întâlneşte cercul în P şi mediatoarea segmentului $[OC]$ în Q. Să se găsească locul geometric al punctelor M de pe coardă pentru care $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$ *(trisectoarea lui Mac Laurin)*.

R: Fie $y = tx$ ecuaţia secantei, $(x-2a)^2+y^2 = 4a^2$ ecuaţia cercului şi $x = a$ ecuaţia mediatoarei. Atunci: $P\left(\dfrac{4a}{1+t^2}, \dfrac{4at}{1+t^2}\right)$, $Q(a, at)$. Scriind că $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$, obţinem ecuaţiile parametrice ale locului:

$$x = a\frac{t^2-3}{t^2+1},\ y = at\frac{t^2-3}{t^2+1},\ \ t \in \mathbf{R}.$$

Ecuaţia carteziană implicită este $x(x^2 + y^2) - a(y^2 - 3x^2) = 0$ (Fig. 13.4, Anexa 3).

13.1.7 Se dă cercul $\mathrm{C}(O, a)$ şi punctul A pe cerc. Fie P şi Q două puncte pe cerc ai căror vectori de poziţie $\overrightarrow{OP}$ şi $\overrightarrow{OQ}$ fac cu $\overrightarrow{OA}$ unghiurile 2α şi respectiv $-\alpha$. Să se găsească locul geometric al punctelor M de intersecţie a tangentelor în P şi Q la cerc (*Trisectoarea lui Longchamps*).

R: In reperul în care axa Ox are direcţia şi sensul lui $\overrightarrow{OA}$, avem

$$P(a\cos 2\alpha, a\sin 2\alpha),\ Q(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$$

şi deci tangentele în cele două puncte au ecuaţiile:

$$x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha - a = 0,\ \ x\cos\alpha - y\sin\alpha - a = 0.$$

Eliminând pe α între cele două ecuaţii, observând că $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, se obţine ecuaţia carteziană implicită a curbei: $x(x^2 - y^2) - a(x^2 + y^2) = 0$.

13.1.8 Curba $x = x(t)$, $y = y(t)$ se numeşte *unicursală* dacă $x(t)$ şi $y(t)$ sunt funcţii raţionale de t. Să se arate că o curbă dată printr-o reprezentare implicită de forma: $\varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) = 0$, unde $\varphi_k(x, y)$ este un polinom omogen de gradul k, este o curbă unicursală.

R: Luând $y = tx$, se obţine reprezentarea parametrică:

$$x = -\frac{\varphi_{n-1}(1,t)}{\varphi_n(1,t)},\quad y = -t\frac{\varphi_{n-1}(1,t)}{\varphi_n(1,t)}.$$

13.1.9 Curba descrisă de un punct M situat pe un cerc de rază R, care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc fix de rază R_0, cele două cercuri fiind tangente exterior, se numeşte *epicicloidă*. Să se găsească o reprezentare parametrică a curbei.

R: O reprezentare parametrică a curbei este

$$x = (R_0 + R)\cos t - R\cos\frac{R_0+R}{R}t,\ \ y = (R_0 + R)\sin t - R\sin\frac{R_0+R}{R}t.$$

In particular, dacă $R = R_0$, curba se numeşte *cardioidă* şi are ecuaţia carteziană

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

13.1.10 Curba descrisă de un punct M situat pe un cerc de rază R, care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc fix de rază R_0, cele două cercuri fiind tangente interioare, se numeşte *hipocicloidă*. Să se găsească o reprezentare parametrică a curbei.

R: O reprezentare parametrică a curbei este

$$x = (R_0 - R)\cos t + R\cos\frac{R_0 - R}{R}t, \quad y = (R_0 - R)\sin t - R\sin\frac{R_0 - R}{R}t.$$

Pentru $R_0 = 3R$ curba se numeşte *hipocicloida lui Steiner*, iar pentru $R_0 = 4R$ curba obţinută este *astroida* de ecuaţie carteziană $x^{2/3} + y^{2/3} = R_0^{2/3}$.

13.1.11 Figura de echilibru a unui fir greu şi omogen, flexibil dar inextensibil ale cărui capete sunt fixate în două puncte se numeşte *lănţişor*. Să se găsească ecuaţia carteziană explicită a curbei.

R: Ecuaţia sa carteziană explicită este $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$.

13.1.12 Curba plană descrisă de un punct care se mişcă uniform pe o dreaptă în rotaţie uniformă în jurul unui punct fix al ei O se numeşte *spirala lui Arhimede*. Să se găsească ecuaţia explicită, în coordonate polare, a curbei.

R: Ecuaţia curbei este $r = a\theta$.

13.1.13 Curba plană descrisă de un punct care se mişcă cu viteză proporţională cu distanţa parcursă pe o dreaptă în rotaţie uniformă în jurul unui punct fix al ei O se numeşte *spirală logaritmică*. Să se găsească ecuaţia explicită, în coordonate polare, a curbei.

R: Ecuaţia curbei este $r = ke^{m\theta}$.

13.1.14 Să se găsească ecuaţiile tangentei şi normalei la curbele:

1) $x = t^3 - 2t$, $y = t^2 + 1$ în punctul $M_0(1)$.

2) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (*astroidă*) în punctul $M(t)$.

3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (*cicloidă*) în punctul $M(t)$.

4) $y = x^2 + 4x + 3$, în punctele de abscise -1, 0, 1.

5) $y = \mathrm{tg}\,x$, în punctele de abscise 0, $\dfrac{\pi}{4}$.

6) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (*foliul lui Descartes*) în $M_0\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$.

7) $F(x, y) = x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$ (*cissoida lui Diocles*) în $M_0\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$.

8) $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ (*lemniscata lui Bernoulli*) în punctul $M_0(x_0, y_0)$.

9) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $y^2 = 2px$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ de pe curbă.

R: 1) Ecuaţiile tangentei şi normalei într-un punct $M_0(t_0)$ al curbei $x = x(t)$, $y = y(t)$ sunt:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}, \quad x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.$$

Dar, $x(1) = -1$, $y(1) = 2$, $x'(1) = 1$, $y'(1) = 2$, deci: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{2}$, $x+1+2(y-2) = 0$.

2) $x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t$, $y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$, ecuaţia tangentei: $x\sin t + y\cos t - a\sin t\cos t = 0$, ecuaţia normalei: $-x\cos t + y\sin t - a(1 - 2\cos^2 t) = 0$.

3) $x'(t) = a(1-\cos t)$, $y'(t) = a\sin t$, ecuaţia tangentei: $x\sin t - y(1-\cos t) - a(t - \sin t)\sin t + a(1-\cos t)^2 = 0$, ecuaţia normalei: $(1-\cos t)x + y\sin t - at(1-\cos t)$.

6) Ecuaţiile tangentei şi normalei într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ al curbei $F(x, y) = 0$ sunt:

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0, \quad \frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

$F(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}) = 0$, M_0 aparţine curbei. $F'_x\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right) = F'_y\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right) = \frac{9}{4}a^2$. Ecuaţia tangentei: $x + y - 3a$, ecuaţia normalei: $x - y = 0$.

7) $F\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0$, M_0 aparţine curbei. $4x - 2y - a = 0$, $2x + 4y - 3a = 0$.

8) $F'_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2 - a^2)$, $F'_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2 + a^2)$.

9) Ecuaţiile tangentelor: $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} - 1 = 0$, $\dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{y_0y}{b^2} - 1 = 0$, $y_0y = p(x + x_0)$.

13.1.15 Să se scrie ecuaţiile tangentelor la curba $(\mathcal{C})$ $x = t^2 - 1$, $y = t^3 + 1$, $t \in \mathbf{R}$, paralele cu dreapta (D) $2x - y + 3 = 0$.

R: $\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{N} = 0$, $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$, $\mathbf{N}(2, -1)$, $4t - 3t^2 = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{4}{3}$, $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$, $M_1(-1, 1)$ este punct singular, $\mathbf{r}'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$. Tangenta în $M_2\left(\frac{7}{9}, \frac{91}{27}\right)$ are ecuaţia: $54x - 27y + 49 = 0$.

13.1.16 Să se scrie ecuaţiile tangentelor la curba $(\mathcal{C})$ $x = t^3$, $y = t^2$, care trec prin punctul $M_0(-7, -1)$.

R: $M_0 \notin \mathcal{C}$. $\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$. O dreaptă prin M_0 de direcţie $\mathbf{r}'$ are ecuaţia:

$$(D) \quad \frac{x + 7}{3t^2} = \frac{y + 1}{2t}, \quad t \neq 0.$$

Punctul $M(t^3, t^2) \in D$, dacă $t^3 + 3t - 14 = 0$, cu rădăcina $t = 2$, deci ecuaţia tangentei este: $x - 3y + 4 = 0$.

13.1.17 Fie T_0 şi respectiv N_0 punctele în care tangenta şi normala în punctul M_0, de abscisă x_0, la curba $y = f(x)$ întâlnesc axa Ox şi P_0 proiecţia punctului M_0 pe axa Ox. Să se arate că segmentele: tangentă $[M_0T_0]$, normală $[M_0N_0]$, subtangentă $[T_0P_0]$ şi subnormală $[P_0N_0]$ sunt date de:

$$\left\|\overrightarrow{M_0T_0}\right\| = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \sqrt{1+f'^2(x_0)}, \quad \left\|\overrightarrow{M_0N_0}\right\| = |f(x_0)| \sqrt{1+f'^2(x_0)},$$

$$\left\|\overrightarrow{P_0T_0}\right\| = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|, \quad \left\|\overrightarrow{P_0N_0}\right\| = \left|f(x_0)f'(x_0)\right|.$$

R: Tangenta şi normala în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ au ecuaţiile:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad x - x_0 + f'(x_0)(y - f(x_0)).$$

Făcând pe $y = 0$, se obţin coordonatele punctelor T_0 şi N_0.

13.1.18 *Tractricea* este curba cu proprietatea că în fiecare punct al ei, segmentul tangentă are lungimea constantă a. Să se găsească ecuaţia acestei curbe.

R: Din $\left|\dfrac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2} = a$ rezultă: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\sqrt{a^2-y^2}}{|y|}$, de unde prin integrare găsim:

$$x(y) = \pm\left(a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}\right), \quad y \in [-a, a].$$

O reprezentare parametrică a curbei se obţine luând $y = a \sin t$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{cases} x = \pm\left(\ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2} + \cos t\right), & y = a\sin t, \quad t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right], \\ x = \pm\left(\ln \operatorname{ctg} \dfrac{t}{2} - \cos t\right), & y = a\sin t, \quad t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

13.1.19 Să se găsească punctele multiple şi ecuaţiile tangentelor în aceste puncte ale curbelor:

1) $x(x^2+y^2) - 2ay^2 = 0$ (*cissoida lui Diocles*).
2) $(x^2+y^2)(y-a)^2 - b^2y^2 = 0$ (*concoida lui Nicomede*)
3) $(2a-x)y^2 = x(x-a)^2$ (*strofoida*).
4) $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$ (*lemniscata lui Bernoulli*).
5) $(x^2+y^2-2ax)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0$ (*cardioida*).

R: 1) $O(0,0)$ este punct de întoarcere, ecuaţia tangentei: $y = 0$.

2) $O(0,0)$ pentru $b > a$ este nod, ecuaţiile tangentelor: $y = \pm\dfrac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}x$, pentru $b < a$ este punct izolat, iar pentru $b = a$ este punct de întoarcere, ecuaţia tangentei: $x = 0$.

3) $M_0(a,0)$ este nod, ecuaţiile tangentelor: $y = \pm(x-a)$.

4) $O(0,0)$ este nod, ecuaţiile tangentelor: $y = \pm x$.

5) $O(0,0)$ este punct de întoarcere, ecuaţia tangentei: $y = 0$.

13.1.20 Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

1) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln x, x \in [1,4]$. 2) $x = 8at^3, y = 3a(2t^2 - t^4), t \in [0, \sqrt{2}]$.
3) $r = a(1+\cos\theta), \theta \in [0, 2\pi)$. 4) $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

R: 1) Dacă $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, atunci: $s = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$, deci:
$s = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^4 \dfrac{1+x^2}{x}dx = 2\ln 2 + \dfrac{15}{2}$.

2) Dacă $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$, atunci: $s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$, deci: $s = 12a\int_0^{\sqrt{2}} t\left(1+t^2\right)dt = 24a$.

3) $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = 2a\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right| d\theta$, deci $s = 2a\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right| d\theta = 8a$.

4) $s = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt = \dfrac{3}{2}a$.

13.1.21 Să se calculeze curbura curbei:

1) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$. 2) $x = a\,\mathrm{ch}\,t, y = b\,\mathrm{sh}\,t$. 3) $y = \sin x$.
4) $y^2 = 2px$. 5) $y = a\,\mathrm{ch}\,(\dfrac{x}{a})$ *(lănţişorul)*. 6) $y = \ln x$.

R: 1) Pentru o curbă dată prin reprezentarea parametrică $x = x(t)$, $y = y(t)$, curbura are expresia:

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}.$$

Se obţine: $\kappa = \dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$. 2) $\kappa = \dfrac{ab}{(a^2\,\mathrm{sh}^2\,t + b^2\,\mathrm{ch}^2\,t)^{3/2}}$.

3) Pentru o curbă dată prin reprezentarea $y = f(x)$, curbura are expresia:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'^2(x))^{3/2}}.$$

Se obţine: $\kappa = \dfrac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$. 4) $\kappa = \dfrac{\sqrt{p}}{(p+2x)^{3/2}} = \dfrac{p^2}{(y^2+p^2)^{3/2}}$. 5) $\kappa = \dfrac{a}{y^2}$.

13.1.22 Să se găsească curbura unei curbe dată prin ecuaţia implicită $F(x,y) = 0$, într-un punct ordinar al ei.

R: Presupunem $F_y \neq 0$, atunci $y'(x) = -\dfrac{F_x}{F_y}$. Se obţine:

$$\kappa = \frac{\left|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_y^2\right|}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}.$$

13.1.23 Să se găsească punctele în care curbura ia o valoare extremă (vârfurile curbei):

1) $x = at - d\sin t,\ y = a - d\cos t$. 2) $y = e^x$.

R: 1) $\kappa(t) = d\dfrac{|a\cos t - d|}{\sqrt{(a^2 - 2ad\cos t + d^2)^3}}$, $\kappa'(t) = -a\dfrac{\sin t(a^2 + ad\cos t - 2d^2)}{\sqrt{(a^2 - 2ad\cos t + d^2)^3}}$, pentru $a\cos t - d > 0$ şi $\kappa'(t) = a\dfrac{\sin t(a^2 + ad\cos t - 2d^2)}{\sqrt{(a^2 - 2ad\cos t + d^2)^3}}$, pentru $a\cos t - d < 0$, $M_{\min}((2k+1)\pi a, a+d)$, $M_{\max}(2k\pi a, a-d)$, $k \in \mathbf{Z}$.
2) $\kappa(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}}$, $\kappa'(x) = \dfrac{e^x(1-2e^{2x})}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}}$, $M_{\max}\left(-\dfrac{1}{2}\ln 2, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

13.1.24 Să se găsească curbura unei curbe dată în coordonate polare prin ecuaţia: $r = r(\theta)$.

R: Deoarece $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, o reprezentare parametrică a curbei este: $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$. Se obţine $\kappa = \dfrac{\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$.

13.1.25 Să se găsească înfăşurătoarelor familii de curbe plane:

1) $(x-\alpha)^2 + y^2 = a^2$.	2) $(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 = \alpha^2$.
3) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.	4) $y^2 = (x-\alpha)^3$.
5) $y^3 = (x-\alpha)^2$.	6) $3(y-\alpha)^2 - 2(x-\alpha)^3 = 0$.
7) $(1-\alpha^2)x + 2\alpha y - a = 0$.	8) $\alpha^2(x-a) - \alpha y - a = 0$.

R: 1) Se elimină α între ecuaţiile: $F(x,y) = 0$ şi $F_\alpha(x,y) = 0$. Se obţine: $y = \pm a$.
2) $x = 0$, $y = 0$. 3) $x^2 + y^2 = p^2$.
4) $y = 0$ este locul geometric al punctelor singulare.
5) $y = 0$ este locul geometric al punctelor singulare.
6) $y = x$ este locul geometric al punctelor singulare, $x - y = \dfrac{2}{9}$ este înfăşurătoarea.
7) $\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}$. 8) $y^2 + 4a(x-a) = 0$.

13.1.26 Să se găsească înfăşurătoarea unei familii de drepte care formează cu axele de coordonate un triunghi de arie constantă $2a$.

R: Dacă α şi β sunt tăieturile dreptei pe axe, atunci $|\alpha\beta| = 4a$ şi $F(x,y,\alpha) = \pm 4ax + \alpha^2 y - 4a\alpha = 0$, $F_\alpha(x,y,\alpha) = 2\alpha y - 4a = 0$. Rezultă: $xy = \pm a^2$.

13.1.27 Să se găsească înfăşurătoarea unei familii de drepte pe care axele de coordonate determină un segment de lungime constantă a.

R: Dacă α şi β sunt tăieturile dreptei pe axe, atunci $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$ sau $\alpha = a\cos t$, $\beta = a\sin t$. Deci: $F(x,y,t) = x\sin t + y\cos t - a\sin t\cos t = 0$, $F_t(x,y,t) = x\cos t - y\sin t - a\cos 2t = 0$. Se obţine astroida: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

13.1.28 Să se găsească ecuaţiile evolutei curbelor:

1) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.	2) $x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ y = b\,\mathrm{sh}\,t$.
3) $y = x^2$.	4) $y = \ln x$.

R: 1) Pentru o curbă dată prin reprezentarea parametrică $x = x(t)$, $y = y(t)$, o reprezintare parametrică ale evolutei este:

$$x = x(t) - y'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}, \quad y = y(t) + x'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}.$$

Se obţine: $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = -\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t$, $c^2 = a^2 - b^2$. 2) $x = \dfrac{c^2}{a}\operatorname{ch}^3 t$, $y = \dfrac{c^2}{b}\operatorname{sh}^3 t$, $c^2 = a^2 + b^2$. 3) Luăm $x = t$, $y = t^2$. Obţinem: $x = -4t^3$, $y = 3t^2 + \dfrac{1}{2}$. 4) Luăm $x = t$, $y = \ln t$. Obţinem: $x = 2t + \dfrac{1}{t}$, $y = \ln t - t^2 - 1$.

13.1.29 Să se găsească evolventa curbelor:

$$1)\ x^2 + y^2 = a^2. \qquad 2)\ x = t,\ y = \frac{t^2}{4}.$$
$$3)\ y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\ \textit{care trece prin vârful ei.}$$

R: 1) Ecuaţiile evolventei curbei C dată prin ecuaţiile $x = x(s)$, $y = y(s)$ sunt:

$$X = x(s) + (k - s)\dot{x}(s), \quad Y = y(s) + (k - s)\dot{y}(s),$$

în care k este o constantă arbitrară.Cum $s = at$, găsim $x = a\cos t - (k - at)\sin t$, $y = a\sin t + (k - at)\cos t$.

2) $x = \dfrac{t}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{t^2+4}}\left(k - \ln(t + \sqrt{t^2+4})\right)$, $y = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}\left(k - \ln(t + \sqrt{t^2+4})\right)$.

3) Se obţine tractricea: $x = a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{a} + \cos t\right)$, $y = a\sin t$.

13.1.30 Să se găsească ramurile infinite şi asimptotele curbelor:

$$1)\ x = \frac{2t}{(t-1)(t-2)},\ y = \frac{t^2}{(t-1)(t-3)}. \qquad 2)\ x = \frac{2t-1}{t^2-1},\ y = \frac{t^2}{t-1}.$$
$$3)\ x = \frac{t^2}{t-1},\ y = \frac{t}{t^2-1}. \qquad 4)\ xy^2 - y^2 - 4x = 0.$$
$$5)\ (x^2 - y^2)(x - y) = 1. \qquad 6)\ xy = 1.$$

R: 1) Ramuri infinite pentru: $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$. Asimptotă orizontală: $y = -4$, verticală: $x = 3$. Asimptotă oblică: $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4}$.

2) $y = -\dfrac{1}{2}$, $x = 0$, $y = 2x + \dfrac{1}{2}$. 3) $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = 0$, $2x - 4y - 3 = 0$.

4) Luând $y = t$ se obţine reprezentarea parametrică: $x = \dfrac{t^2}{t^2-4}$, $y = t$. Asimptote: $y = \pm 2$, $x = 1$.

5) Luând $x - y = t$ se obţine reprezentarea parametrică: $x = \dfrac{1+t^3}{2t^2}$, $y = \dfrac{1-t^3}{2t^2}$. Asimptote: $y = \pm x$.

13.1.31 Să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic curbele:
1) $x = -t^3 + 3t$, $y = 3t^2$, $t \in \mathbf{R}$.
2) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$, $t \in \mathbf{R}$ sau $x^3 + y^3 = 3axy$ (*foliul lui Descartes*).
3) $x^3 - xy^2 + 2y^2 = 0$.
4) $x = r(2\cos t + \cos 2t)$, $y = r(2\sin t - \sin 2t)$ (*hipocicloida lui Steiner*).

R: 1) 1. $t \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = \mp\infty$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = +\infty$. Curba are două ramuri infinite. 2. $x(t) = 0$ pentru $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \pm\sqrt{3}$, $y(0) = 0$, $y(\pm\sqrt{3}) = 9$, $y(t) = 0$ pentru $t_1 = 0$, $x(0) = 0$. Curba intersectează axa Oy în două puncte $O(0,0)$, $A(0,9)$. 3. Curba nu este periodică. 4. $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = y(t)$, curba este simetrică faţă de axa Oy. 5. $x'(t) = -3(t^2-1)$, $x'(t) = 0$ pentru $t = \pm 1$, $x(\pm 1) = \pm 2$, $y(\pm 1) = 3$, $y'(t) = 6t$, $y'(t) = 0$ pentru $t = 0$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. 6. Ecuaţia implicită a curbei este: $F(x,y) = 27x^2 - y^3 + 18y^2 - 81y = 0$, $F'_x = 54x$, $F'_y = -3(y^2 - 12y + 27)$ şi $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F = 0$ pentru $x_0 = 0$, $y_0 = 9$, $M_0(0,9)$ este nod cu $m^2 = 3\ell^2$. 7. Tabelul de variaţie:

t	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x'	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	9	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

8. Nu există asimptote. 9. Graficul este dat în Fig. 13.5, Anexa 3.

2) $t \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$. Curba este simetrică faţă de prima bisectoare, $O(0,0)$ nod, $x = 0$, $y = 0$ tangente în origine. Tabelul de variaţie:

t	$-\infty$		-1		0		$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x'	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x	0	$\nearrow$	$\vert$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0

Asimptotă: $x + y + a = 0$. Graficul este dat în Fig. 13.6, Anexa 3.

3) Luând $y = tx$ se obţine reprezentarea parametrică: $x = \dfrac{2t^2}{t^2-1}$, $y = \dfrac{2t^3}{t^2-1}$. Curba este simetrică faţă de axa Ox. $O(0,0)$ este punct de întoarcere. Tabelul de variaţie:

t	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		∞
x'	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
x	2	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$\vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	3	$\searrow$	2
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$	∞

Are trei asimptote: $x = 2$, $x - y + 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$. Graficul este dat în Fig. 13.7, Anexa 3.

4) $t \in [0, 2\pi]$. Curba este simetrică faţă de axa Ox.

$$x'(t) = -2r\sin t(1+2\cos t),\ \ x'(t)=0 \ \Rightarrow\ t \in \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\},$$

$$y'(t) = 2r(1-\cos t)(1+2\cos t),\ \ y'(t)=0 \ \Rightarrow\ t \in \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}.$$

$t=0$, $t=\dfrac{2\pi}{3}$, $t=\dfrac{4\pi}{3}$ puncte singulare. Tabelul de variaţie:

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
x'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
x	$3r$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}r$	$\nearrow$	$-r$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}r$	$\nearrow$	a
y'	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}r$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}r$	$\nearrow$	0

Graficul este dat în Fig. 13.8, Anexa 3.

13.2 Curbe în spaţiu

13.2.1 Se numeşte *elice* curba descrisă de un punct de pe cilindrul $x^2+y^2=a^2$ a cărui proiecţie în planul Oxy se deplasează cu viteză unghiulară constantă şi a cărui proiecţie pe axa Oz se deplasează cu viteză constantă. Să se găsească o reprezentare parametrică a elicei şi ecuaţiile proiecţiilor elicei pe planele de coordonate.

R: Proiecţia punctului $M(x,y,z)$ de pe cilindru în planul Oxy are coordonatele: $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$ cu $\dfrac{d\theta}{dt}=\omega$, $\omega=$ const, deci $\theta=\omega t$. Proiecţia punctului M pe axa Oz are cota z cu $\dfrac{dz}{dt}=k$, deci $z=kt$. Se obţine reprezentarea parametrică: $x=a\cos\omega t$, $y=a\sin\omega t$, $z=kt$. Dacă se ia θ ca parametru, obţinem reprezentarea: $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $z=b\theta$, cu $b=\dfrac{k}{\omega}$. Ecuaţiile proiecţiilor pe planele de coordonate sunt: pe $Oxy: x^2+y^2=a^2$, $z=0$, pe $Oyz: y=a\sin\dfrac{z}{b}$, $x=0$, pe Ozx : $x=a\cos\dfrac{z}{b}$, $y=0$.

13.2.2 Un punct M se deplasează pe o generatoare a unui cilindru circular cu viteză proporţională cu drumul parcurs. Cilindrul se roteşte în jurul axei sale cu viteză unghiulară constantă. Să se găsească ecuaţiile parametrice ale curbei descrise de punctul M.

R: $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $z=be^{k\theta}$.

13.2.3 Sfera de rază R şi cilindrul circular de rază $\dfrac{R}{2}$, care trece prin centrul sferei, se intersectează după o curbă numită *fereastra lui Viviani*. Să se găsească ecuaţiile carteziene implicite ale curbei, precum şi o reprezentare parametrică a acesteia.

R: Alegem originea reperului în centrul sferei, axa Oz paralelă cu axa cilindrului, axa Ox trecând prin centrul cilindrului. Se obţine: $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x^2+y^2-Rx = 0$. Deoarece ecuaţia cilindrului se scrie: $(x-\frac{R}{2})^2+y^2 = \frac{R^2}{4}$, luând: $x-\frac{R}{2} = \frac{R}{2}\cos t$, $y = \frac{R}{2}\sin t$, obţinem:

$$x = \frac{R}{2}(1+\cos t), \quad y = \frac{R}{2}\sin t, \quad z = \pm R\sin\frac{t}{2}.$$

13.2.4 O dreaptă prin origine, care nu este perpendiculară pe axa Oz, se roteşte în jurul acesteia cu viteză unghiulară constantă. Curba descrisă de un punct M care se deplasează pe această dreaptă:

1) cu viteză constantă se numeşte *elice conică*.

2) cu viteză proporţională cu distanţa parcursă se numeşte *spirală conică*.

Să se găsească ecuaţiile parametrice ale acestor curbe.

R: Dacă (r,φ,θ) sunt coordonatele sferice ale punctului M, avem: $\theta = \text{const}$, $\left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, deci $\varphi = \omega t$.

1) $\frac{dr}{dt} = k$, deci $r = kt$. Obţinem: $x = kt\sin\theta\cos\omega t$, $y = kt\sin\theta\sin\omega t$, $z = kt\cos\theta$ sau, notând: $a = \frac{k}{\omega}\cos\varphi$, $b = \frac{k}{\omega}\sin\varphi$, găsim reprezentarea parametrică: $x = a\varphi\cos\varphi$, $y = a\varphi\sin\varphi$, $z = b\varphi$.

2) $\frac{dr}{dt} = mr$, deci $r = r_0e^{mt}$, obţinem reprezentarea: $x = ae^{k\varphi}\cos\varphi$, $y = ae^{k\varphi}\sin\varphi$, $z = be^{k\varphi}$, în care $k = \frac{m}{\omega}$, $a = r_0\sin\theta$, $b = r_0\cos\theta$.

13.2.5 Axele a doi cilindri circulari, de raze a şi b, se taie sub un unghi drept. Cilindrii se intersectează după două curbe închise numite *bicilindrice*. Să se găsească ecuaţiile carteziene implicite ale lor şi o reprezentare parametrică. Să se studieze cazul $a = b$.

R: $x^2+z^2 = a^2$, $y^2+z^2 = b^2$. O reprezentare parametrică (cu $a \leq b$):

$$x = a\cos t, \quad y = \pm\sqrt{b^2-a^2\sin^2 t}, \quad z = a\sin t.$$

Pentru $b = a$ se obţin două elipse.

13.2.6 Se dau curba: $\mathbf{r} = a(\sin t+\cos t)\mathbf{i} + a(\sin t-\cos t)\mathbf{j} + be^{-t}\mathbf{k}$ şi punctul ei $M_0(0)$. Să se găsească ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal în M_0.

R: Deoarece $\mathbf{r}(0) = a(\mathbf{i}-\mathbf{j})+b\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(0) = a(\mathbf{i}+\mathbf{j})-b\mathbf{k}$, ecuaţiile tangentei în M_0 la curbă se scriu $\frac{x-a}{a} = \frac{y+a}{a} = \frac{z-b}{-b}$, iar ecuaţia planului normal va fi $a(x-a)+a(y+a)-b(z-b) = 0$.

13.2.7 Se dau curba: $y = 2e^x$, $z = 3\ln(x+1)$ şi punctul $M_0(0,2,0)$ situat pe curbă. Să se găsească ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal în M_0.

R: Deoarece $f'(0)=2$, $g'(0)=3$, ecuaţiile tangentei în M_0 vor fi $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{3}$, iar ecuaţia planului normal: $x+2(y-2)+3z=0$.

13.2.8 Se dau curba: $F(x,y,z)=x^2+y^2-10=0$, $G(x,y,z)=y^2+z^2-25=0$ şi punctul $M_0(1,3,4)$. Să se găsească ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal în M_0.

R: Deoarece $\operatorname{grad} F(x,y,z)=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}$, $\operatorname{grad} G(x,y,z)=2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ şi deci $\mathbf{v}=4(12\mathbf{i}-4\mathbf{j}+3\mathbf{k})$, ecuaţiile tangentei se scriu $\dfrac{x-1}{12}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-4}{3}$, iar ecuaţia planului normal: $12(x-1)-4(y-3)+3(z-4)=0$.

13.2.9 Se dă curba $\mathbf{r}=3\cos t\,\mathbf{i}+3\sin t\,\mathbf{j}+4t\,\mathbf{k}$ (*elicea circulară*). Să se scrie ecuaţiile axelor şi planelor reperului Frénet ataşat curbei într-un punct $M(t)$ al acesteia.

R: Deoarece $\mathbf{r}'=-3\sin t\,\mathbf{i}=3\cos t\,\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $ds=||\mathbf{r}'(t)||\,dt=5\,dt$. Deducem că $t=\dfrac{s}{5}$. Avem deci

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}&=3\cos\frac{s}{5}\,\mathbf{i}+3\sin\frac{s}{5}\,\mathbf{j}+\frac{4}{5}s\,\mathbf{k},\\
\dot{\mathbf{r}}&=-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}\,\mathbf{i}+\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}\,\mathbf{j}+\frac{4}{5}\,\mathbf{k},\\
\ddot{\mathbf{r}}&=-\frac{3}{25}\cos\frac{s}{5}\,\mathbf{i}-\frac{3}{25}\sin\frac{s}{5}\,\mathbf{j},
\end{aligned}$$

dar: $\mathbf{t}=\dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{n}=\dfrac{\ddot{\mathbf{r}}}{||\ddot{\mathbf{r}}||}$, $\mathbf{b}=\dfrac{\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}}{||\ddot{\mathbf{r}}||}$, încât

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}&=\frac{1}{5}(-3\sin t\,\mathbf{i}+3\cos t\,\mathbf{j}+4\,\mathbf{k}),\\
\mathbf{n}&=-\cos t\,\mathbf{i}-\sin t\,\mathbf{j},\\
\mathbf{b}&=\frac{1}{5}(4\sin t\,\mathbf{i}-4\cos t\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{k}).
\end{aligned}$$

Ecuaţiile axelor sunt

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{x-3\cos t}{-3\sin t}=\dfrac{y-3\sin t}{3\cos t}=\dfrac{z-4t}{4} & \text{– ecuaţiile tangentei,}\\
\dfrac{x-3\cos t}{\cot s}=\dfrac{y-3\sin t}{\sin t}=\dfrac{z-4t}{0} & \text{– ecuaţiile normalei principale,}\\
\dfrac{x-3\cos t}{4\sin t}=\dfrac{y-3\sin t}{-4\cos t}=\dfrac{z-4t}{3} & \text{– ecuaţiile binormalei.}
\end{array}$$

Ecuaţiile planelor sunt

$$\begin{array}{ll}
-3x\sin t+3y\cos t+4z-16t=0 & \text{– ecuaţia planului normal,}\\
x\cos t+y\sin t-3=0 & \text{– ecuaţia planului rectificator,}\\
4x\sin t-4y\cos t+3z-12t=0 & \text{– ecuaţia planului osculator.}
\end{array}$$

13.2.10 Să se găsească ecuaţiile tangentelor şi planelor normale la curbele:

1) $x = \dfrac{1}{\cos t},\ y = \operatorname{tg}\, t,\ z = at,\ pentru\ t = \dfrac{\pi}{4}.$
2) $x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t^2,\ pentru\ t = 1.$
3) $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t,\ pentru\ t = 0.$
4) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a \sin \dfrac{t}{2},\ pentru\ t = \dfrac{\pi}{2}.$

R: 1) $\dfrac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z - \frac{a\pi}{2}}{a}$. 2) $\dfrac{x-e}{e} = \dfrac{y - e^{-1}}{-e^{-1}} = \dfrac{z-1}{2}$.
3) $x = y + 1 = z$. 4) $x - \dfrac{a}{2}(\pi - 4) = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} z - a$.

13.2.11 Să se găsească punctele curbei $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$, în care tangenta la curbă este paralelă cu planul (P) $3x + y + z + 2 = 0$.

R: Din $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{N} = 0$, rezultă $M_1(-2, 12, 14)$, $M_2(-2, 3, -4)$.

13.2.12 Să se găsească ecuaţiile tangentei şi planului normal la elicea $x = 2\cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 4t$.

R: $x = 2$, $2y - z = 0$; $y + 2z = 0$.

13.2.13 Să se găsească curba de intersecţie a tangentelor la curba: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, cu planul Oxy.

R: $4y = 3x^2$, $z = 0$.

13.2.14 Să se arate că curba: $x = e^{t/\sqrt{2}} \cos t$, $y = e^{t/\sqrt{2}} \sin t$, $z = e^{t/\sqrt{2}}$ este situată pe conul: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ şi întâlneşte generatoarele sale sub un unghi de 45^o.

R: $F(e^{t/\sqrt{2}} \cos t, e^{t/\sqrt{2}} \sin t, e^{t/\sqrt{2}}) = 0$. Generatoarea prin $M(t)$ are ecuaţiile:

$$\frac{x}{e^{t/\sqrt{2}} \cos t} = \frac{y}{e^{t/\sqrt{2}} \sin t} = \frac{z}{e^{t/\sqrt{2}}}.$$

$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{r}'(t)||} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, deci: $\theta = 45^0$.

13.2.15 Să se găsească ecuaţiile tangentei şi planului normal la curba: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 - Rx = 0$ (*fereastra lui Viviani*) într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al acesteia.

R: Ecuaţiile tangentei: $\dfrac{x - x_0}{2y_0 z_0} = \dfrac{y - y_0}{z_0(R - 2x_0)} = \dfrac{z - z_0}{-Ry_0}$, iar ecuaţia planului normal: $2y_0 z_0 x + z_0(R - 2x_0)y - Ry_0 z = 0$.

13.2.16 Fie dată curba $(\mathcal{C})$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ şi fie $\mathbf{t}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}$ versorul tangentei la curbă. Se numeşte *indicatoare sferică* a tangentelor la curba $\mathcal{C}$ curba de ecuaţie: $\mathbf{r} = \mathbf{t}(t)$. Să se găsească indicatoarea sferică a tangentelor la elicea

$$\mathbf{r} = a(\mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t) + bt\mathbf{k}.$$

R: Cercul: $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}$, $z = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

13.2.17 Să se arate că dacă toate planele normale la o curbă în spaţiu trec printr-un punct fix, atunci curba este situată pe sfera cu centrul în acel punct (curba se numeşte *sferică*).

R: Dacă $C(a, b, c)$ aparţine planului normal:

$$x'(t)(x - x(t)) + y'(t)(y - y(t)) + z'(t)(z - z(t)) = 0,$$

atunci $[(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 + (z(t) - c)^2]' = 0$ sau

$$(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 + (z(t) - c)^2 = R^2.$$

13.2.18 Să se găsească ecuaţiile tangentei şi planului normal la curba: $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$, în punctul ei $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

R: Ecuaţiile tangentei: $\dfrac{x - x_0}{ay_0} = \dfrac{y - y_0}{by_0} = \dfrac{z - z_0}{x_0 y_0}$, iar ecuaţia planului normal: $ay_0(x - x_0) + by_0(y - y_0) + x_0 y_0(z - z_0) = 0$, cu $x_0^2 + y_0^2 > 0$.

13.2.19 Să se găsească ecuaţiile planelor osculatoare ale curbei: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, care trec prin punctul $A(2, -\frac{1}{3}, -6)$.

R: $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = 6t^2\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Ecuaţia planului osculator în punctul $M(t, t^2, t^3)$ este: (P) $3t^2(x - t) - 3t(y - t^2) + (z - t^3) = 0$. $A \in P$ dacă $6t^2 - t^3 + t - 6 = 0$, se obţine: $t_1 = 1$, $t_2 = 6$, $t_3 = -1$.

13.2.20 Să se găsească ecuaţia planului osculator al curbei: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = e^t$, în punctul $M_0(0)$.

R: $bx + ay + abz = 2ab$.

13.2.21 Să se găsească ecuaţia planului osculator la curba de intersecţie a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ cu cilindrul hiperbolic $x^2 - y^2 = 3$ în punctul $M_0(2, 1, 2)$.

R: Dacă $y = f(x)$, $z = g(x)$ este o reprezentare explicită a curbei, cu $x = 2$, $f(2) = 1$, $g(2) = 2$, din $f^2(x) + g^2(x) = 9 - x^2$ şi $f^2(x) = x^2 - 3$, găsim: $f(x)f'(x) + g(x)g'(x) = -x$, $f(x)f'(x) = x$, $f(x)f''(x) + g(x)g''(x) = -1$, $f(x)f''(x) + f'^2(x) = 1$, de unde: $f'(2) + 2g'(2) = -2$, $f'(2) = 2$, $f''(2) + 2g''(2) = -9$, $f''(2) = -3$. Deci: $f'(2) = 2$, $g'(2) = -2$, $f''(2) = -3$, $g''(2) = -3$, $\mathbf{N} = -3(4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$ şi planul osculator are ecuaţia: $4x - y + z - 9 = 0$.

13.2.22 Să se arate că curba: $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = 2t$ este situată pe suprafaţa: $x^2 + y^2 - e^z = 0$ şi că planul osculator al curbei se confundă cu planul tangent la suprafaţă.

R: $F(e^t\cos t, e^t\sin t, 2t) = 0$. $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = -2e^t(2\mathbf{i}\cos t + 2\mathbf{j}\sin t - e^t\mathbf{k})$,
iar $\operatorname{grad} F(e^t\cos t, e^t\sin t, 2t) = e^t(2\mathbf{i}\cos t + 2\mathbf{j}\sin t - e^t\mathbf{k})$.

13.2.23 Să se demonstreze că tangentele la curba $\mathbf{r} = a(\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t) + be^t\mathbf{k}$ intersectează planul Oxy după un cerc.

R: $\mathbf{r}' = a(-\mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t) + be^t\mathbf{k}$. Ecuaţiile tangentei:

$$\frac{x - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{z - be^t}{be^t}.$$

Pentru $z = 0$ se obţine curba:

$$x = a(\cos t + \sin t),\ y = a(\sin t - \cos t),$$

a cărei ecuaţie implicită este: $x^2 + y^2 = 2a^2$.

13.2.24 Să se demonstreze că planele normale în orice punct al curbei:

$$\mathbf{r} = a(1 - \cos t)\mathbf{i} + a\mathbf{j}\sin t + 2a\mathbf{k}\cos\frac{t}{2}$$

trec printr-un punct fix şi să se determine acest punct.

R: $x\sin t + y\cos t - z\sin\dfrac{t}{2} = 0$, $O(0,0,0)$.

13.2.25 Să se determine versorii tangentei, normalei principale şi binormalei, precum şi ecuaţiile planelor normal, rectificator şi osculator al curbelor $\mathcal{C}$, dacă:

1) $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}\sqrt{2}$ *în punctul* $M_0(0) \in \mathcal{C}$.
2) $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ *în punctul* $M_0(0) \in \mathcal{C}$.
3) $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$ *în punctul* $M_0(1) \in \mathcal{C}$.
4) $\mathbf{r} = (t^2 - 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \mathbf{k}\ln t$ *în punctul* $M_0(1) \in \mathcal{C}$.

13.2.26 Să se determine punctele curbei: $\mathbf{r} = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2t^2 - 1)\mathbf{k}$ prin care se pot duce binormale perpendiculare pe dreapta: $x + y = 0$, $z = 4x$.

R: $t^3 - 3t - 2 = 0$, $t_1 = t_2 = -1$, $t_3 = 2$.

13.2.27 Să se determine punctele de pe curba: $\mathbf{r} = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + \mathbf{j}\ln|t| + t\mathbf{k}$ unde normala principală este paralelă cu planul: $5x + 2y - 5z - 4 = 0$.

R: $2t^4 - 5t^3 + 5t - 2 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = \dfrac{1}{2}$, $t_{3,4} = \pm 1$.

13.2.28 Să se găsească lungimea arcului elicei: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, cuprins între punctul de intersecţie cu planul Oxy şi un punct arbitrar $M(t)$.

R: $s = t\sqrt{a^2 + b^2}$.

13.2.29 Să se găsească lungimea unei spire a curbei:

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a \cos \frac{t}{2},$$

mărginită de două puncte consecutive ale sale de intersecţie cu planul Oxz.

R: $s = 2a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a\sqrt{2}$.

13.2.30 Să se găsească lungimea arcului curbei: $x^3 = 3a^2 y$, $2xz = a^2$, cuprins între planele $y = \frac{a}{3}$, $y = 9a$.

R: Cu: $x = t$, $y = \frac{1}{2a^2} t^3$, $z = \frac{a^2}{2t}$, obţinem: $s = \int_a^{3a} \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{a^2}{2t^2} \right) dt = 9a$.

13.2.31 Să se arate că lungimea curbei închise: $x = \cos^3 t$, $y \sin^3 t$, $z = \cos 2t$ este 10.

R: $s = 4 \cdot \frac{5}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 10$.

13.2.32 Să se găsească lungimea arcului curbei: $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = at$, cu extremităţile în punctele $M_0(0)$, $M(t)$.

R: $s = a\sqrt{2} \operatorname{sh} t$.

13.2.33 Să se găsească expresia elementului de arc al unei curbe:
1) în coordonate cilindrice. 2) în coordonate sferice.

R: 1) $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$. 2) $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\varphi^2$.

13.2.34 Să se calculeze curbura şi torsiunea curbelor:

$$\begin{array}{ll} 1)\ x = a \operatorname{ch} t,\ y = a \operatorname{sh} t,\ z = at. & 2)\ x = a \cos t,\ y = a \sin t,\ z = bt. \\ 3)\ x = t \cos t,\ y = t \sin t,\ z = bt. & 4)\ x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t\sqrt{2}. \\ 5)\ x = 2t,\ y = \ln t,\ z = t^2. & 6)\ x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ z = \cos 2t. \end{array}$$

R: 1) Dacă curba C este dată prin reprezentarea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, regulată de ordin cel puţin trei, curbura şi torsiunea în punctul ordinar $M(t)$ au expresiile:

$$\kappa = \frac{||\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''||}{||\mathbf{r}'||^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{||\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''||^2}.$$

Deci, $\kappa = \tau = \frac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}$. 2) $\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$.

3) $\kappa = \frac{2}{1 + a^2}$. 4) $\kappa = -\tau = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$.

5) $\kappa = -\tau = \frac{2t}{(1 + 2t^2)^2}$. 6) $\kappa = \frac{3}{25 \sin t \cos t}$, $\tau = \frac{4}{25 \sin t \cos t}$.

13.2.35 Să se arate că următoarele curbe sunt plane şi să se găsească ecuaţiile planelor ce le conţin:

$$1)\ x = \frac{1+t}{1-t},\ y = \frac{1}{1-t^2},\ z = \frac{1}{1+t}.$$
$$2)\ x = a_1t^2 + b_1t + c_1,\ y = a_2t^2 + b_2t + c_2,\ z = a_3t^2 + b_3t + c_3.$$

R: 1) $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = 0$. Dacă $Ax + By + Cz + D = 0$ este planul ce conţine curba, atunci: $Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D = 0$ pentru $t \in \mathbf{R} \setminus \{-1, +1\}$, de unde: $x - 4y + 2z + 1 = 0$.

2) $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = 0$. Planul curbei: $\begin{vmatrix} x - c_1 & y - c_2 & z - c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$

13.2.36 Să se găsească ecuaţiile intrinseci ale curbelor:

$$1)\ x = a \operatorname{ch} t,\ y = a \operatorname{sh} t,\ z = at.\ \ 2)\ x = ct,\ y = c\sqrt{2} \ln t,\ z = \frac{c}{t}.$$

R: 1) $\kappa = \tau = \dfrac{a}{2a^2 + s^2}$. 2) $\kappa = \tau = \dfrac{c\sqrt{2}}{4c^2 + s^2}$.

13.2.37 Să se arate că există un vector $\boldsymbol{\omega}$ a.î. formulele lui Frénet să se scrie sub forma:

$$\dot{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t},\ \ \dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n},\ \ \dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

R: Formulele lui Frénet sunt: $\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$, $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}$. Luăm $\boldsymbol{\omega} = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b}$. Se obţine: $\boldsymbol{\omega} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$.

13.3 Suprafeţe

13.3.1 In planul Oxz se dă curba $(\mathcal{C})$ $x = f(u)$, $z = g(u)$, $u \in I \subset \mathbf{R}$. Să se găsească o reprezentare parametrică a suprafeţei de rotaţie obţinută prin rotirea curbei $\mathcal{C}$ în jurul axei Oz.

R: Punctul $M\left(f\left(u\right), 0, g\left(u\right)\right) \in \mathcal{C}$ descrie cercul de ecuaţii:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \left[f^2\left(u\right) + g^2\left(u\right)\right] = 0, z = g\left(u\right),\ \text{sau}\ x^2 + y^2 - f^2\left(u\right) = 0, z = g\left(u\right).$$

Rezultă reprezentarea parametrică:

$$x = f(u)\cos v,\ y = f(u)\sin v,\ z = g(u),\ \ (u, v) \in I \times [0, 2\pi).$$

13.3.2 Să se găseacsă câte o reprezentare parametrică pentru suprafeţele de rotaţie obţinute prin rotirea curbei $\mathcal{C}$ în jurul axei Oz, dacă curba $\mathcal{C}$ este:

1) Cercul $x = a + b\cos u,\ y = 0,\ z = b\sin u,\ (a > b),\ u \in [0, 2\pi)$.

2) Lănţişorul $x = a \operatorname{ch} \dfrac{u}{a},\ y = 0,\ z = u,\ u \in \mathbf{R}$.

3) Tractricea $x = a\sin u,\ y = 0,\ z = a(\ln \operatorname{tg} \dfrac{u}{2} + \cos u),\ u \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

R: 1) *Torul*:

$$\begin{cases} x = (a + b\cos u)\cos v, \\ y = (a + b\cos u)\sin v, \quad (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi). \\ z = b\sin u, \end{cases}$$

2) *Catenoidul*:

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{u}{a}\cos v, \\ y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{u}{a}\sin v, \quad (u, v) \in \mathbf{R} \times [0, 2\pi). \\ z = u, \end{cases}$$

3) *Pseudosfera*:

$$\begin{cases} x = a\sin u\cos v, \\ y = a\sin u\sin v, \quad (u, v) \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right) \times [0, 2\pi). \\ z = a(\ln \mathrm{tg}\dfrac{u}{2} + \cos u), \end{cases}$$

13.3.3 Numim *elicoid* suprafaţa generată de o curbă $\mathcal{C}$ (numită *profil*) în mişcare de rotaţie în jurul unei axe (Δ) şi în acelaşi timp de translaţie paralelă cu această axă, vitezele acestor mişcări fiind proporţionale. Să se găsească ecuaţiile elicoidului.

R: Dacă se ia axa Oz drept axă de rotaţie şi se presupune că la momentul $t = 0$ curba $\mathcal{C}$ este situată în planul Oxz, deci $x = f(u)$, $y = 0$, $z = g(u)$. Avem: $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\sin v$, $\dfrac{dz}{dt} = a\dfrac{dv}{dt}$, cu $a =$ const şi $z\,|_{t=0} = g(u)$. Ecuaţiile elicoidului sunt:

$$x = f(u)\cos v,\ y = f(u)\sin v,\ z = g(u) + av.$$

13.3.4 Un *elicoid* se numeşte (1) *normal* sau (2) *oblic* după cum profilul este o dreaptă perpendiculară sau nu pe axa de rotaţie. Să se găsească ecuaţiile acestora.

R: 1) Ecuaţiile profilului sunt: $x = u$, $y = 0$, $z = 0$, iar ecuaţiile elicoidului normal sunt:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av.$$

2) Ecuaţiile profilului sunt: $x = u$, $y = 0$, $z = mu$, $m \neq 0$, iar ecuaţiile elicoidului oblic sunt:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = mu + av.$$

13.3.5 Pe suprafaţa: $x = u + \cos v$, $y = u - \sin v$, $z = \lambda u$, se dă punctul M_0 de coordonate parametrice $u_0 = 1$, $v_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

1) Să se scrie ecuaţiile tangentelor şi planelor normale la curbele $u = 1$ şi $v = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Să se găsească unghiul dintre curbele $u = 1$ şi $v = \dfrac{\pi}{2}$ în M_0.

3) Să se arate că curba: $u = \sin v$ şi curba $u = 1$ admit o tangentă comună în M_0.

R: 1) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-\lambda}{0}$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-\lambda}{\lambda}$, $x-1=0$, $x+y+\lambda z-(1+\lambda^2)=0$.
2) $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2+\lambda^2}}$.
3) Curba: $x=\sin v-\cos v$, $y=0$, $z=\lambda\cos v$ admite ca tangentă în M_0 dreapta D.

13.3.6 Să se găsească ecuaţiile planelor tangente şi normalelor la suprafeţele:
1) $x=2u-v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3-v^3$, în punctul $M_0(3,5,7)$.
2) $x=u+v$, $y=u-v$, $z=uv$, în punctul M_0 de coordonate parametrice $(2,1)$.
3) $z=x^3+y^3$, în punctul $M_0(1,2,9)$.
4) $x^2+y^2+z^2-168=0$, în punctul $M_0(3,4,12)$.
5) $x^2-2y^2-3z^2-4=0$, în punctul $M_0(3,1,-1)$.
6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de pe suprafaţă.

R: 1) $\mathbf{N}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$, $u_0=2$, $v_0=1$, $18x+3y-4z-41=0$.
2) $3x-y-2z-4=0$.
3) $\mathbf{N}=-p\mathbf{i}-q\mathbf{j}+\mathbf{k}$, cu $p=f'_x$, $q=f'_y$, $3x+12y-z-18=0$.
4) $\mathbf{N}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k}$, $3x+4y+12z-169=0$.
5) $3x-2y+3z-4=0$.
6) $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-1=0$.

13.3.7 Să se găsească ecuaţia planului tangent în punctul $M_0(u_0,v_0)$, cu $\cos u_0=\frac{3}{5}$, $\cos v_0=\frac{4}{5}$, $(u_0,v_0)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, la:
1) Pseudosfera

$$x=a\sin u\cos v,\ y=a\sin u\sin v,\ z=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}+\cos u\right).$$

2) Elicoidul normal

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=au.$$

3) Torul

$$x=(7+5\cos u)\cos v,\ y=(7+5\cos u)\sin v,\ z=5\sin u,$$

R: 1) $x\cos u\cos v+y\cos u\sin v-z\sin u+a(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2})\sin u)=0$.
2) $ax\sin v-ay\cos v+uz-auv=0$.
3) $12x+9y+29z-230=0$.

13.3.8 Să se găsească ecuaţia planului tangent suprafeţei: $xyz=1$, paralel cu planul: $x+y+z=0$.

R: $y_0z_0=1$, $x_0z_0=1$, $x_0y_0=1$, cu $x_0y_0z_0=1$, $M_0(1,1,1)$, $x+y+z-3=0$.

13.3.9 Să se arate că planele tangente la suprafaţa $xyz = a^3$ formează cu planele de coordonate un tetraedru de volum constant.

R: Planul tangent la suprafaţă în punctul ei $M_0(x_0, y_0, z_0)$ are ecuaţia: $y_0z_0x + z_0x_0y + x_0y_0z - 3a^3 = 0$. Se obţine $\mathcal{V} = \dfrac{9a^3}{2}$.

13.3.10 Să se arate că planele tangente la suprafaţa de ecuaţie $z = x^3 + y^3$, în punctele $M_0(\alpha, -\alpha, 0)$ formează un fascicul.

R: $\alpha^2(x + y) - z = 0$.

13.3.11 *S*ă se găsească prima formă fundamentală a următoarelor suprafeţe de rotaţie:

1) $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\sin v$, $z = g(u)$.
2) $x = R\cos u\cos v$, $y = R\cos u\sin v$, $z = R\sin u$ (*sfera*).
3) $x = a\cos u\cos v$, $y = a\cos u\sin v$, $z = c\sin v$ (*elipsoidul de rotaţie*).
4) $x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v$, $y = a\,\mathrm{ch}\,u\sin v$, $z = c\,\mathrm{sh}\,u$ (*hiperboloidul cu o pânză*).
5) $x = a\,\mathrm{sh}\,u\cos v$, $y = a\,\mathrm{sh}\,u\sin v$, $z = c\,\mathrm{sh}\,u$ (*hiperboloidul cu două pânze*).
6) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$ (*paraboloidul de rotaţie*).
7) $x = R\cos v$, $y = R\sin v$, $z = u$ (*cilindrul circular*).
8) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = ku$ (conul circular).
9) $x = (a + b\cos u)\cos v$, $y = (a + b\cos u)\sin v$, $z = b\sin u$ (*torul*).
10) $x = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{u}{a}\cos v$, $y = aa\,\mathrm{ch}\,\dfrac{u}{a}\sin v$, $z = u$ (*catenoidul*).
11) $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$, $z = a\left(\ln\mathrm{tg}\dfrac{u}{2} + \cos u\right)$ (*pseudosfera*).

R: Prima formă fundamentală a suprafeţei este

$$\Phi(d\mathbf{r}) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

unde $E = \mathbf{r}_u^2$, $F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v$, $G = \mathbf{r}_v^2$. Se obţine:

1) $\Phi(du, dv) = (f'^2(u) + g'^2(u))du^2 + f^2(u)dv^2$.
2) $\Phi(du, dv) = R^2(du^2 + \cos^2 v\,dv^2)$.
3) $\Phi(du, dv) = (a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u)du^2 + a^2\cos^2 u\,dv^2$.
4) $\Phi(du, dv) = (a^2\mathrm{sh}^2 u + c^2\mathrm{ch}^2 u)du^2 + a^2\mathrm{ch}^2 u\,dv^2$.
5) $\Phi(du, dv) = (a^2\mathrm{ch}^2 u + c^2\mathrm{sh}^2 u)du^2 + a^2\mathrm{sh}^2 u\,dv^2$.
6) $\Phi(du, dv) = (1 + u^2)du^2 + u^2\,dv^2$.
7) $\Phi(du, dv) = du^2 + R^2dv^2$.
8) $\Phi(du, dv) = (1 + k^2)du^2 + u^2dv^2$.
9) $\Phi(du, dv) = b^2du^2 + (a + b\cos u)^2dv^2$.
10) $\Phi(du, dv) = \mathrm{ch}^2\dfrac{u}{a}du^2 + a^2\mathrm{ch}^2\dfrac{u}{a}dv^2$.
11) $\Phi(du, dv) = a^2\mathrm{ctg}^2 u\,du^2 + a^2\sin^2 u\,dv^2$.

13.3.12 *S*e dă suprafaţa: $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$.

1) Să se găsească prima formă fundamentală a suprafeţei.
2) Să se calculeze elementul de arc al curbelor: $u = 2$, $v = 1$, $v = au$.
3) Să se calculeze lungimea arcului curbei $v = au$ cuprins între punctele sale de intersecţie cu curbele $u = 1$, $u = 2$.

R: 1) $\Phi(du, dv) = (8u^2 + v^2)du^2 + 2uvdudv + (8v^2 + u^2)dv^2$.
2) $ds = \sqrt{\Phi(du, dv)} = 2\sqrt{2v^2 + 1}dv$, $ds = \sqrt{8u^2 + 1}du$, $ds = 2u\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}du$.
3) $s = 3\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}$.

13.3.13 Să se găsească unghiul dintre liniile $u + v = 0$, $u - v = 0$ de pe elicoidul normal:

$$x = u \cos v, \ y = u \sin v, \ z = av.$$

R: $\cos \theta = \pm \left(1 - a^2\right) / \left(1 + a^2\right)$.

13.3.14 Să se găsească unghiul dintre liniile $v = 2u$, $v = -2u$ de pe o suprafaţa a cărei primă formă fundamentală este $\Phi(du, dv) = du^2 + dv^2$.

R: $\cos \theta = -3/5$.

13.3.15 Să se găsească unghiul dintre liniile $v = u + 1$, $v = 3 - u$ de pe suprafaţa: $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$.

R: $\cos \theta = 2/3$.

13.3.16 Să se găsească aria triunghiului curbiliniu mărginit de liniile $u = \pm av$ şi $v = 1$ de pe o suprafaţă a cărei primă formă fundamentală este $\Phi(du, dv) = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

R: Elementul de arie al suprafeţei $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ este: $dS = \sqrt{EG - F^2}dudv$. In cazul nostru: $dS = \sqrt{u^2 + a^2}dudv$. Deci

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left(\int_{-av}^{av} \sqrt{u^2 + a^2}du \right) dv = a^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \right).$$

13.3.17 Să se găsească aria patrulaterului curbiliniu mărginit de liniile $u = 0$, $u = a$, $v = 0$ şi $v = 1$ de pe elicoidul normal: $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$.

R: $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}a^2 \left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right)$.

CAPITOLUL 14

ECUAŢII ŞI SISTEME DIFERENŢIALE LINIARE

14.1 Sisteme diferenţiale liniare de ordinul întâi

14.1.1 Se dă sistemul:

$$x' = -\frac{3}{t}x - \frac{1}{t}y,\ y' = \frac{1}{t}x - \frac{1}{t}y,\quad t > 0.$$

Să se verifice că:

$$x_1(t) = \frac{1}{t^2},\ y_1(t) = -\frac{1}{t^2};\quad x_2(t) = \frac{1}{t^2}\ln t,\ y_2(t) = -\frac{1}{t^2}(1 + \ln t),$$

formează un sistem fundamental de soluţii şi să se scrie soluţia generală a sistemului.

R: Soluţia generală este:

$$x(t) = \frac{1}{t^2}\left(C_1 + C_2 \ln t\right),\quad y(t) = -\frac{1}{t^2}\left(C_1 \ln t + C_2\left(1 + \ln t\right)\right).$$

14.1.2 Se dă sistemul:

$$x' = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t}y,\ y' = -\frac{4}{t}x + \frac{3}{t}y + 2,\quad t > 0.$$

Să se verifice că:

$$x_1(t) = t,\ y_1(t) = 2t;\quad x_2(t) = t\ln t,\ y_2(t) = t(1 + 2\ln t),$$

formează un sistem fundamental de soluţii şi să se scrie soluţia generală a sistemului.

R: O soluţie particulară a sistemului este: $x^*(t) = t\ln^2 t,\ y^*(t) = 2t(\ln^2 t + \ln t)$.

14.1.3 Se dă sistemul:

$$tx' = x + y,\ ty' = -y + \frac{t}{(t+1)^2} - \ln(t+1),\ \ t > 0.$$

Să se verifice că:

$$x_1(t) = t,\ y_1(t) = 0;\quad x_2(t) = \frac{1}{t},\ y_2(t) = -\frac{2}{t},$$

formează un sistem fundamental de soluţii şi să se scrie soluţia generală a sistemului.

R: O soluţie particulară a sistemului este: $x^* = \ln(t+1),\ y^* = \dfrac{t}{t+1} - \ln(t+1)$.

14.1.4 Se dă sistemul:

$$x' = \frac{4}{t}\,x - \frac{4}{t^2}\,y + \frac{1}{t},\ y' = 2\,x - \frac{1}{t}\,y + t,\ \ t \in (0,\infty).$$

Să se verifice că: $x_1(t) = 1$, $y_1(t) = t$ şi $x_2(t) = 2t^2$, $y_2(t) = t^3$, $t \in (0,\infty)$, formează un sistem fundamental de soluţii şi să se scrie soluţia generală a sistemului.

R: Deoarece $W(t) = -t^3 \neq 0$, cele două soluţii formează un sistem fundametal de soluţii pentru sistemul dat şi deci soluţia generală a sistemului omogen corespunzător este

$$x(t) = C_1 + 2C_2\,t^2,\ y(t) = C_1\,t + C_2\,t^3.$$

Căutăm pentru sistemul neomogen o soluţie particulară de forma

$$x^*(t) = u(t) + 2t^2\,v(t),\ y(t) = t\,u(t) + t^3\,v(t).$$

Derivând şi înlocuind în sistem, obţinem

$$u' + 2t^2\,v' = \frac{1}{t},\ u' + t^3\,v' = t,$$

sau, rezolvând în privinţa lui u' şi v':

$$u' = 2 - \frac{1}{t},\ v' = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3},$$

de unde, prin integrare $u(t) = 2t - \ln t$, $v(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2t^2}$. Inlocuind în $x^*(t)$ şi $y^*(t)$, obţinem soluţia particulară a sistemului neomogen

$$x^*(t) = 4t - 1 - \ln t,\ y^*(t) = 3t^2 - \frac{1}{2}t - t\ln t$$

şi deci soluţia generală a sistemului neomogen este

$$x(t) = C_1 + 2C_2\,t^2 + 4t - 1 - \ln t,\ y(t) = C_1\,t + C_2\,t^3 + 3t^2 - \frac{1}{2}t - t\ln t,\ \ t > 0.$$

14.2 Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

14.2.1 Să se determine soluţia generală a sistemului diferenţial liniar omogen cu coeficienţi constanţi:

$$x' = 3y - 4z, \;\; y' = -z, \;\; z' = -2x + y.$$

R: Matricea transformării liniare asociate este

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a transformării liniare T este $\lambda^3 - 7\lambda - 6 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$, simple. Deci transformarea T poate fi adusă la expresia canonică. Vectorii proprii corespunzători sunt

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (5, 2, 4), \quad \mathbf{u}_3 = (5, 1, -3).$$

Deci funcţiile

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}(1, 1, 1), \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{-2t}(5, 2, 4), \quad \mathbf{x}_3(t) = e^{3t}(5, 1, -3)$$

formează un sistem fundamental de soluţii. Soluţia generală a sistemului se scrie atunci

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{-2t} + 5C_3 e^{3t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{-2t} + \;C_3 e^{3t}, \\ z(t) = C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t} - 3C_3 e^{3t}, \end{array} \right. \quad t \in \mathbf{R}.$$

14.2.2 Să se determine soluţia generală a sistemului

$$x' = y, \quad y' = -x.$$

R: Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 + 1 = 0$ şi deci $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, iar vectorii proprii corespunzători $\mathbf{u}_1 = (1, i)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -i)$. Un sistem fundamental de soluţii (complexe) va fi

$$\mathbf{x}_1(t) = (e^{it}, ie^{it}), \quad \mathbf{x}_2(t) = (e^{-it}, -ie^{-it}).$$

Prin schimbarea precedentă, obţinem sistemul fundamental de soluţii (reale)

$$\mathbf{y}_1(t) = (\cos t, -\sin t), \quad \mathbf{y}_2(t) = (\sin t, \cos t),$$

încât, soluţia generală a sistemului diferenţial dat se va scrie

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

14.2.3 Să se determine soluţiile generale ale sistemelor:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{array} \right. \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x + 8y, \\ y' = -x - 3y. \end{array} \right.$$

R: Avem:
1) $x\,(t) = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}$, $y\,(t) = C_1 \left(\sqrt{2} - 1\right) e^{t\sqrt{2}} - C_2 \left(\sqrt{2} + 1\right) e^{-t\sqrt{2}}$.
2) $x\,(t) = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}$, $y\,(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

14.2.4 Să se determine soluţia sistemului: $x' = 2x + y$, $y' = x + 2y$, care satisface condiţiile iniţiale: $x\,(0) = 1$, $y\,(0) = 3$.

R: $x\,(t) = 2e^{3t} - e^t$, $y\,(t) = 2e^{3t} + e^t$.

14.2.5 Să se determine soluţia generală a sistemului $x' = y$, $y' = -x + 2y$.

R: Ecuaţia caracteristică este $(\lambda - 1)^2 = 0$ şi deci $\lambda_1 = 1$, cu $m_1 = 2$, iar vectorul propriu corespunzător $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$. Transformarea liniară T nu poate fi adusă la expresia canonică. Căutăm atunci soluţia generală sub forma

$$x(t) = (a + bt)e^t, y(t) = (c + dt)e^t.$$

Derivând şi înlocuind în sistem, obţinem pentru a, b, c, d sistemul: $a + b = c$, $b = d$, $a - c + d = 0$, $b - 2c + d = 0$, care este compatibil dublu nedeterminat. Luând $a = C_1$, $b = C_2$, găsim $c = C_1 + C_2$, $d = C_2$ a.î. soluţia generală va fi

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^t, \quad y(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^t.$$

14.2.6 Să se rezolve sistemul liniar: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, în care:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

R: Valorile proprii ale matricei A sunt: $\lambda_1 = 2$, $m_1 = 1$, $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1)$, $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 1)$. O soluţie a sistemului este $\mathbf{x}_1(t) = (2, 0, 1)e^{2t}$. Corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$, căutăm o soluţie de forma:

$$\mathbf{x}(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)e^t.$$

Se obţine prin identificare: $\mathbf{x}(t) = (C_2 + C_3 t, C_2 - C_3 + C_3 t, C_2 + C_3 t)e^t$. Soluţia generală este:

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3 t)e^t, \\ y(t) = (C_2 - C_3 + C_3 t)e^t, \\ z(t) = C_1 e^t + (C_2 + C_3 t)e^t. \end{cases}$$

14.2.7 Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale omogene:

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = 2x - y. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$$

R: 1) $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, $\lambda_1 = 3$, $m_1 = 2$. Căutăm soluţia sub forma: $\mathbf{x}(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t)e^{3t}$. Se obţine:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{3t},\ y(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}.$$

2) $\lambda^2 + 9 = 0$, $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$. Se obţin soluţiile complexe:

$$\mathbf{x}_1(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, 1\right) e^{3it},\ \mathbf{x}_2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, 1\right) e^{-3it}.$$

Dar: $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)) = \left(\dfrac{1}{2}\cos 3t - \dfrac{3}{2}\sin 3t, \cos 3t\right), \\ \dfrac{1}{2i}(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) = \left(\dfrac{1}{2}\cos 3t + \dfrac{3}{2}\sin 3t, \sin 3t\right), \end{cases}$ sunt soluţii liniar independente reale.

Deci: $\begin{cases} x(t) = C_1 \left(\dfrac{1}{2}\cos 3t - \dfrac{3}{2}\sin 3t\right) + C_2\left(\dfrac{3}{2}\cos 3t + \dfrac{1}{2}\sin 3t\right), \\ y(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t. \end{cases}$

3) $x(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t)\, e^{4t}$, $y(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{4t}$.

14.2.8 Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale omogene:

$$1) \begin{cases} x' = 4x - 3y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = 12x - 5y, \\ y' = 5x + 12y. \end{cases} \quad 3 \begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

R: Avem:

1) $x(t) = (C_1 \cos 3t - C_2 \sin 3t)\, e^{4t}$, $\quad y(t) = (C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t)\, e^{4t}$.
2) $x(t) = (C_1 \cos 5t - C_2 \sin 5t)\, e^{12t}$, $\quad y(t) = (C_1 \sin 5t + C_2 \cos 5t)\, e^{12t}$.
3) $x(t) = C_1 \cos 3t + (5C_2 - 3C_1)\sin 3t$, $\quad y(t) = C_2 \sin 3t + (2C_1 - 3C_2)\cos 3t$.

14.2.9 Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale omogene:

$$1) \begin{cases} x' = 3x - y + z, \\ y' = -x + 5y - z, \\ z' = x - y + 3z. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 3y - z, \\ z' = -x + 2y + 3z. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

R: 1) $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Se obţine:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, \\ y(t) = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}, \\ z(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}. \end{cases}$$

2) $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 22\lambda - 20 = 0$, valorile proprii: $2, 3 + i, 3 - i$ şi deci:

$$\mathbf{x}_1(t) = (1, 0, 1)\, e^{2t},\ \mathbf{x}_2(t) = (1, 1 + i, 2 - i)e^{(3+i)t},\ \mathbf{x}_3(t) = (1, 1 - i, 2 + i)e^{(3-i)t}.$$

Soluţia reală este:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 \cos t + C_3 \sin t) e^{3t}, \\ y(t) = \left(C_2 (\cos t - \sin t) + C_3 (\cos t + \sin t)\right) e^{3t}, \\ z(t) = C_1 e^{2t} + \left(C_2 (2\cos t + \sin t) - C_3 (\cos t - 2\sin t)\right) e^{3t}. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t}, \\ y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t}, \\ z(t) = 2C_1 e^{2t} - C_3 e^{-t}. \end{cases}$$

14.2.10 Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale omogene:

$$1) \begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2z, \\ z' = 2x. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = z + x, \\ x' = x + y. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = 6x - 12y - z, \\ y' = x - 3y - z, \\ z' = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$$

R: Avem:

$$1) \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} \sin t\sqrt{3} + C_2 e^{-t} \cos t\sqrt{3} + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = -\frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\sqrt{3}\right) e^{-t} \sin t\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left(C_1\sqrt{3} - C_2\right) e^{-t} \cos t\sqrt{3} + C_3 e^{2t}, \\ z(t) = -\frac{1}{2}\left(C_1 - C_2\sqrt{3}\right) e^{-t} \sin t\sqrt{3} - \frac{1}{2}\left(C_1\sqrt{3} + C_2\right) e^{-t} \cos t\sqrt{3} + C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

2) $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $y(t) = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $z(t) = C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$.

$$3) \begin{cases} x(t) = 2C_1 e^{t} + \frac{7}{3} C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}, \\ y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ z(t) = -2C_1 e^{t} - \frac{8}{3} C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

14.2.11 Să se rezolve sistemul omogen, cu condiţiile iniţiale precizate:

$$\begin{cases} x' = 8y, \\ y' = -2z, \\ z' = 2x + 8y - 2z, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -4, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

R: $x(t) = -4e^{-2t} - 2\sin 4t$, $y(t) = e^{-2t} - \cos 4t$, $z(t) = e^{-2t} - 2\sin 4t$.

14.2.12 Să se determine soluţia generală a sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare neomogene:

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{t}, \\ y' = x + 2y + 3e^{4t}. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, \\ y' = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$$

R: Avem:
1) $x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} + te^{t} - e^{4t}$, $y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} - (t+1)e^{t} - 2e^{4t}$.
2) $x(t) = C_1 t + C_2 + 2\sin t$, $y(t) = 2C_1 t - C_1 - 2C_2 - 3\sin t - 2\cos t$.

14.2.13 Să se determine soluţia problemei lui Cauchy pentru sistemul:

$$x' = x + y, \;\; y' = -2x + 4y,$$

cu condiţiile iniţiale: $x(0) = 0$, $y(0) = -1$.

R: $x(t) = (1 - t)\cos t - \sin t$, $y(t) = (t - 2)\cos t + t\sin t$.

14.2.14 Să se determine soluţia generală a sistemelor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:

$$\begin{aligned}
&1)\; x' = y + 1,\; y' = x + 1.\\
&2)\; x' = -2x - 4y + 1 + 4t,\; y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2.\\
&3)\; x' = 3x - \frac{1}{2}y - 3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2},\; y' = 2y - 2t - 1.
\end{aligned}$$

R: Avem:

$$\begin{aligned}
&1)\; x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1, && y(t) = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1.\\
&2)\; x(t) = C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t} + t + t^2, && y(t) = -C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2.\\
&3)\; x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + t + t^2, && y(t) = 2C_1e^{2t} + 1 + t.
\end{aligned}$$

14.2.15 Să se determine soluţia generală a sistemelor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:

$$1)\; \begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 2x + 3y + t. \end{cases} \quad 2)\; \begin{cases} x' = -y + e^{3t}, \\ y' = -x + 2e^{3t}. \end{cases}$$

R: Avem:

1) $x(t) = -\frac{3}{2}C_1 + 2C_2e^{7t} - \frac{3}{7}t^2 - \frac{6}{49}t - \frac{6}{343}$, $y(t) = C_1 + C_2e^{7t} - \frac{3}{49}t + \frac{2}{7}t^2 - \frac{3}{343}$.

2) $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{1}{8}e^{3t}$, $y(t) = -C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{5}{8}e^{3t}$.

14.2.16 Să se rezolve următoarele sisteme, cu condiţiile iniţiale precizate:

$$1)\; \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 3. \end{cases} \quad 2)\; \begin{cases} x' = 3x + 8y, \\ y' = -x - 3y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 6, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

R: Avem:

1) $x(t) = 2e^{3t} - e^t$, $\quad y(t) = 2e^{3t} + e^t$.

2) $x(t) = 4e^t + 2e^{-t}$, $\quad y(t) = -e^t - e^{-t}$.

14.2.17 Să se rezolve următoarele sisteme, cu condiţiile iniţiale precizate:

$$1)\; \begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x + e^t, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad 2)\; \begin{cases} x' = 3x - y + \sin t, \\ y' = -4x + 3y + \cos t, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

R: Avem:

1) $x(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{5}{4}e^{-t} - 1 + \frac{1}{2}e^t t$, $y(t) = \frac{5}{4}e^t - \frac{5}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t t - t$.

2) $x(t) = -\frac{9}{26}\cos t - \frac{3}{13}\sin t + \frac{75}{104}e^{5t} + \frac{5}{8}e^t$,

$y(t) = -\frac{21}{26}\cos t - \frac{1}{26}\sin t - \frac{75}{52}e^{5t} + \frac{5}{4}e^t$.

14.2.18 Să se determine soluţia generală a sistemelor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:

$$1)\ \begin{cases} x' = 2x + y - 2z - t + 2, \\ y' = -x + 1, \\ z' = x + y - z + 1 - t. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x' = -4x + 2y + 5z + 4t - 2e^{-t} - 4, \\ y' = 6x - y - 6z - 6t - 6, \\ z' = -8x + 3y + 9z - 3e^{-t} + 8t - 9. \end{cases}$$

R: Avem:

$$1)\ \begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t, \\ y(t) = -C_1 e^t + C_2 \cos t - C_3 \sin t + t, \\ z(t) = C_2 \sin t + C_3 \cos t + 1. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_2 + C_3) e^t + t, \\ y(t) = -2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^t + e^{-t}, \\ z(t) = 2C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_3)\, e^t + 1. \end{cases}$$

14.3 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n

14.3.1 Se dă ecuaţia diferenţială liniară omogenă de ordinul al doilea:

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \quad t \in I.$$

Să se arate că dacă $(x_1(t), x_2(t))$ formează un sistem fundamental de soluţii al cărui wronskian este $W(t)$, atunci W este soluţie a ecuaţiei diferenţiale: $W' + a_1(t)W = 0$ şi să se deducă formula lui Abel - Ostrogradski - Liouville:

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(t)dt\right), \quad t_0 \in I.$$

Generalizare.

R: Avem: $x_i''(t) + a_1(t)x_i'(t) + a_2(t)x_i(t) = 0$, pentru $i = 1, 2$. Dar,

$$W'(t) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ -a_1 x_1'(t) & -a_1 x_2'(t) \end{vmatrix} = -a_1(t)W(t).$$

14.3.2 Se dă sistemul de funcţii liniar independente $(x_1(t), x_2(t))$. Să se arate că ecuaţia diferenţială liniară omogenă a cărei soluţie generală este:

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t),$$

cu C_1 şi C_2 constante arbitrare, este:

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x \\ x_1'(t) & x_2'(t) & x' \\ x''(t) & x''(t) & x'' \end{vmatrix} = 0.$$

Generalizare.

R: Derivând $x(t)$ de două ori, prin eliminarea lui C_1 şi C_2 între cele trei relaţii se obţine ecuaţia din enunţ.

14.3.3 Să se formeze ecuaţia diferenţială omogenă al cărui sistem fundamental de soluţii este:

$$\begin{array}{lll} 1)\ x_1(t) = \sin t, & x_2(t) = \cos t. & \\ 2)\ x_1(t) = e^t, & x_2(t) = te^t. & \\ 3)\ x_1(t) = t, & x_2(t) = t^2. & \\ 4)\ x_1(t) = e^t, & x_2(t) = e^t \sin t, & x_3(t) = e^t \cos t. \end{array}$$

R: 1) $x'' + x = 0$. 2) $x'' - 2x' + x = 0$. 3) $x'' - 2tx' + 2x = 0$. 4) $x''' - 3x'' + 4x' - 2x = 0$.

14.3.4 Să se arate că ecuaţia diferenţială $x'' + a^2 x = 0$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ admite soluţiile $x_1(t) = \cos at$, $x_2(t) = \sin at$ şi să se scrie soluţia generală.

R: Wronskianul sistemului $(x_1(t), x_2(t))$ este

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos at & \sin at \\ -a \sin at & a \cos at \end{vmatrix} = a \neq 0.$$

Deci $(x_1(t), x_2(t))$ formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia dată, iar soluţia ei generală este

$$x(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

cu C_1, C_2 constante arbitrare.

14.3.5 Să se integreze ecuaţia $x'' + a^2 x = \cos at$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Să se găsească soluţia problemei lui Cauchy cu condiţiile iniţiale $x\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0$, $x'\left(\frac{\pi}{a}\right) = -\frac{\pi}{2a}$.

R: Soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate este

$$x(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Căutăm o soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă sub forma

$$x^*(t) = u_1(t) \cos at + u_2(t) \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

în care $u_1'(t)$ şi $u_2'(t)$ verifică sistemul

$$u_1' \cos at + u_2' \sin at = 0, \quad -a u_1' \sin at + a u_2' \cos at = \cos at.$$

Rezultă

$$u_1' = -\frac{1}{2a} \sin 2at, \quad u_2' = \frac{1}{2a}(1 + \cos 2at).$$

De unde, până la constante aditive arbitrare, obţinem

$$u_1(t) = \frac{1}{4a^2} \cos 2at, \quad u_2(t) = \frac{1}{2a} t + \frac{1}{4a^2} \sin 2at.$$

Avem deci soluţia particulară

$$x^*(t) = \frac{1}{4a^2}\cos at + \frac{1}{2a}t\sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date se scrie atunci

$$x(t) = C_1\cos at + C_2\sin at + \frac{1}{4a^2}\cos at + \frac{1}{2a}t\sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

cu C_1, C_2 constante arbitrare. Soluţia problemei lui Cauchy cu condiţiile iniţiale $x\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0$, $x'\left(\frac{\pi}{a}\right) = -\frac{\pi}{2a}$, cum $C_1 = -\frac{1}{4a^2}$, $C_2 = 0$, este $x(t) = \frac{t}{2a}\sin at$.

14.3.6 Să se integreze următoarele ecuaţii ştiind că ecuaţiile omogene corespunzătoare admit soluţiile indicate:

1) $(2t+1)x'' + 4tx' - 4x = (2t+1)^2$, $\quad x_1 = t$, $\quad x_2 = e^{-2t}$.
2) $(t^2+1)x'' - 2tx' + 2x = 2(t^2+1)e^t$, $\quad x_1 = t$, $\quad x_2 = t^2 - 1$.
3) $tx''' = x'' - tx' + x = -t^2$, $\quad x_1 = t$, $\quad x_2 = e^t$, $\quad x_3 = e^{-t}$.

R: Avem:
1) $x(t) = C_1 t + C_2 e^{-2t} + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$.
2) $x(t) = C_1 t + C_2\left(t^2 - 1\right) + (t-1)^2 e^t$.
3) $x(t) = C_1 t + C_2 e^t + C_3 e^{-t} + t^2 + 2$.

14.3.7 Să se integreze ecuaţia $x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0$, dacă $x_1(t) = \frac{\sin t}{t}$ este o soluţie particulară.

R: Se face schimbarea de variabilă dependentă $x = x_1(t)\,y$. Se obţine: $x(t) = \frac{1}{t}(C_1\sin t + C_2\cos t)$.

14.3.8 Să se integreze ecuaţia $t^2(\ln t - 1)x'' - tx' + x = 0$, dacă $x_1(t) = t$ este o soluţie particulară.

R: $x(t) = C_1 t - C_2\ln t$.

14.4 Ecuaţii de ordinul n cu coeficienţi constanţi

14.4.1 Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi:

1) $x'' - 5x' + 6x = 0$. 2) $x'' - 9x = 0$. 3) $x'' - x' = 0$.
4) $x'' + x = 0$. 5) $x'' - 2x' + 2x = 0$. 6) $x'' + 4x' + 13x = 0$.

R: 1) Ecuaţia caracteristică $r^2 - 5r + 6 = 0$, are rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Soluţia generală este $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$.
2) $x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$.
3) $x(t) = C_1 + C_2 e^t$.
4) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.
5) $x(t) = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$.
6) $x(t) = e^{-2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$.

14.4.2 Să se integreze ecuaţia $x'' + x = \dfrac{1}{\cos t}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi + \dfrac{\pi}{2}\}$.

R: Ecuaţia omogenă $x'' + x = 0$ are ecuaţia caracteristică $r^2 + 1 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este deci

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Căutăm o soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă sub forma

$$x^*(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \sin t,$$

cu $u_1' \cos t + u_2' \sin t = 0$, $-u_1' \sin t + u_2' \cos t = \dfrac{1}{\cos t}$, de unde $u_1' = -\operatorname{tg} t$, $u_2' = 1$ şi deci

$$u_1(t) = \ln |\cos t|, \quad u_2(t) = t,$$

încât, soluţia generală a ecuaţiei neomogene va fi

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \cdot \ln |\cos t| + t \sin t.$$

14.4.3 Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi de ordinul al doilea, neomogene:

1) $2x'' - x' - x = 4te^{2t}$. 2) $x'' - 2x' + x = te^t$. 3) $x'' + x = t \sin t$.
4) $x'' + x = t^2 + t$. 5) $x'' + x' = t - 2$. 6) $x'' - x = te^{2t}$.
7) $x'' - 7x' + 6x = \sin t$. 8) $x'' + 4x = t \sin 2t$. 9) $x'' + 3x' + 2x = t \sin t$.

R: 1) Se caută o soluţie particulară de forma: $x^*(t) = e^{2t}(At + B)$. Se obţine $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-\dfrac{t}{2}} + e^{2t}\left(\dfrac{4}{5}t - \dfrac{28}{25}\right)$.
2) Se caută o soluţie particulară de forma:

$$x^*(t) = t^2 e^t (At + B).$$

Se obţine $x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^t + \dfrac{1}{6} t^3 e^t$.
3) Se caută o soluţie particulară de forma:

$$x^*(t) = t[(At + B) \cos t + (Ct + D) \sin t].$$

Se obţine $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \dfrac{t^2}{4} \cos t + \dfrac{t}{4} \sin t$.

4) $x(t) = -2 + t + t^2 + C_1 \cos t + C_2 \sin t$.
5) $x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} - 3t + \frac{1}{2} t^2$.
6) $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{3}\left(t - \frac{4}{3}\right) e^{2t}$.
7) $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{6t} + \frac{7}{74} \cos t + \frac{5}{74} \sin t$.
8) $x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{8} t^2 \cos 2t + \frac{1}{16} t \sin 2t + \frac{1}{64} \cos 2t$.
9) $x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + \left(-\frac{3}{10} t + \frac{17}{50}\right) \cos t + \left(\frac{1}{10} t + \frac{3}{25}\right) \sin t$.

14.4.4 Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi de ordinul al doilea, neomogene:

1) $x'' + x' = 4t^2 e^t$.
2) $x'' + 10x' + 25x = 4e^{-5t}$.
3) $x'' - 6x' + 9x = 25 e^t \sin t$.
4) $x'' + 2x' + 5x = e^{-t} \cos 2t$.

R: Avem:
1) $x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + \left(2t^2 - 6t + 7\right) e^t$.
2) $x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-5t} + 2t^2 e^{-5t}$.
3) $x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{3t} t + (4 \cos t + 3 \sin t) e^t$.
4) $x(t) = C_1 e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \sin 2t + \frac{1}{4} t e^{-t} \sin 2t$.

14.4.5 Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi de ordin mai mare decât doi:

1) $x''' - 13x'' + 12x' = 0$ 2) $x''' + x = 0$. 3) $x^{(4)} - 2x'' = 0$.
4) $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0$. 5) $x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0$. 6) $x^{(4)} - 2x'' + x = 0$.
7) $x''' - 2x'' - 3x' = 0$. 8) $x''' + 2x'' + x' = 0$. 9) $x''' + 4x'' + 13x' = 0$.

R: Avem:
1) $x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{12t}$.
2) $x(t) = C_1 e^{-t} + e^{\frac{t}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$.
3) $x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{t\sqrt{2}} + C_4 e^{-t\sqrt{2}}$.
4) $x(t) = e^t \left(C_1 + C_2 t + C_3 t^2\right)$.
5) $x(t) = (C_1 + C_2 t) \cos 2t + (C_3 + C_4 t) \sin 2t$.
6) $x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t} + (C_3 + C_4 t) e^t$.
7) $x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t}$.
8) $x(t) = C_1 + (C_2 + C_3 t) e^{-t}$.
9) $x(t) = C_1 + (C_2 \cos 3t + C_3 \sin 3t) e^{-2t}$.

14.4.6 Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:

1) $x'' + 4x' + 5x = 0.$
2) $x^{(5)} - 2x^{(4)} + 2x''' - 4x'' + x' - 2x = 0.$
3) $x^{(4)} + 4x''' + 8x'' + 8x' + 4x = 0.$
4) $x^{(4)} - 4x''' + 5x'' - 4x' + 4x = 0.$

R: Avem:
1) $x(t) = (C_1 \cos t + C_2 \sin t) e^{-2t}$.
2) $x(t) = (C_1 + C_2 t) \cos t + (C_3 + C_4 t) \sin t + C_5 e^{2t}$.
3) $x(t) = [(C_1 + C_2 t) \cos t + (C_3 + C_4 t) \sin t] e^{-t}$.
4) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + (C_3 + C_4 t) e^{2t}$.

14.4.7 Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei

$$x^{(4)} + 2x''' + 5x'' + 8x' + 4x = 40e^{-t} + \cos t.$$

R: Ecuaţia caracteristică $r^4 + 2r^3 + 5r^2 + 8r + 4 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = -1$ şi $r_3 = 2i$, $r_4 = -2i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene se scrie

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Deoarece $r = -1$ este rădăcină dublă pentru ecuaţia caracteristică, vom căuta o soluţie particulară de forma

$$x^*(t) = At^2 e^{-t} + B \cos t + C \sin t.$$

Introducând în ecuaţie şi identificând coeficienţii, se găseşte $A = 4$, $B = 0$, $C = \dfrac{1}{6}$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei neomogene va fi

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t + 4t^2 e^{-t} + \frac{1}{6} \sin t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

14.4.8 Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi de ordin mai mare decât doi, neomogene:

1) $x^{(4)} - 2x''' + x'' = e^t.$
2) $x^{(4)} - 2x''' + x'' = t^3.$
3) $x''' - x'' + x' - x = t^2 + t.$
4) $x''' - x'' = 12t^2 + 6t.$

R: 1) Se caută $x^*(t) = At^2 e^t$. Rezultă $x(t) = C_1 + C_2 t + \left(C_3 + C_4 t + \dfrac{t^2}{2} \right) e^t$.
2) Se caută $x^*(t) = t^2 \left(A + Bt + Ct^2 + Dt^3 \right)$. Rezultă
$x(t) = (C_1 + C_2 t) + (C_3 + C_4 t) e^t + 12t^2 + 3t^3 + \dfrac{1}{2} t^4 + \dfrac{1}{20} t^5$.
3) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^t - 1 - 3t - t^2$.
4) $x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^t - 15t^2 - 5t^3 - t^4$.

14.4.9 Să se găsească soluţia particulară a ecuaţiei:

$$x''' + 2x'' + 2x' + x = t,$$

care verifică condiţiile iniţiale: $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$.

R: $x(t) = e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + t - 2.$

14.5 Ecuaţia lui Euler

14.5.1 Să se integreze ecuaţiile Euler:

1) $t^2x'' + tx' + x = 1.$ 2) $t^2x'' + 3tx' + x = 0.$
3) $t^2x'' - 4tx' + 6x = t.$ 4) $t^2x'' + 2tx' - 6x = 0.$
5) $t^2x'' - 2tx' + 2x = t^2 - 2t + 2.$ 6) $t^2x'' - tx' - 3x = t.$

R: Avem:
1) $x(t) = C_1\cos(\ln t) + C_2\sin(\ln t) + 1.$
2) $x(t) = (C_1 + C_2\ln t)\frac{1}{t}.$
3) $x(t) = C_1t^3 + C_2t^2 + \frac{1}{2}t.$
4) $x(t) = C_1t^2 + C_2\frac{1}{t^3}.$
5) $x(t) = C_1t + C_2t^2 - t^2 + 2t\ln t + 1 + t^2\ln t + 2t.$
6) $x(t) = C_1\frac{1}{t} + C_2t^3 - \frac{1}{4}t.$

14.5.2 Să se integreze ecuaţiile Euler:

1) $(t-2)^2x'' - 3(t-2)x' + 4x = t - 2.$
2) $t^3x''' - t^2x'' + 2tx' - 2x = t^3 + 2t.$
3) $(4t-1)^2x'' - 2(4t-1)x' + 8x = 0.$
4) $(t+1)^3x'' + 3(t+1)^2x' + (t+1)x = 6\ln(t+1).$

R: Avem:
1) $x(t) = t - 2 + [C_1 + C_2\ln(t-2)](t-2)^2.$
2) $x(t) = C_1t + C_2t^2 + C_3t\ln t + \frac{1}{4}t^3 - t\left(\ln^2 t + 2\ln t + 2\right).$
3) $x(t) = C_1\sqrt{4t-1} + C_2(4t-1).$
4) $x(t) = \frac{C_1}{t+1} + \frac{C_2}{t+1}\ln(t+1) + \frac{1}{t+1}\ln^3(t+1).$

14.5.3 Să se găsească soluţia particulară a ecuaţiei:

$$t^2x'' = tx' + x = 2t,$$

care verifică condiţiile iniţiale: $x(1) = 0$, $x'(1) = 1$.

R: $x(t) = t\left(\ln t + \ln^2 t\right).$

BIBLIOGRAFIE

[1] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Culegere de probleme de algebră liniară, geometrie analitică, diferenţială şi ecuaţii diferenţiale*, Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[2] V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

[3] V. T. Borcea, C. I. Davideanu, C. Forăscu, *Probleme de algebră liniară*, Editura "Gh. Asachi" Iaşi, 2000.

[4] A. Cărăuşu, *Linear Algebra*, Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 1999.

[5] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1989.

[6] Gh. Ciobanu, Gh. Slabu, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, Culegere de probleme, vol. I şi II*, Rotaprint IPI, 1983.

[7] A. Corduneanu, *Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în electrotehnică*, Editura FACLA, Timişoara, 1981.

[8] A. Corduneanu, A. L. Pletea, *Noţiuni de teoria ecuaţiilor diferenţiale*, Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 1999.

[9] M. Craioveanu, I. D. Albu, *Geometrie afină şi euclidiană, Exerciţii*, Editura Facla Timişoara, 1982.

[10] I. Crăciun, Gh. Procopiuc, Al. Neagu, C. Fetecău, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare, Vol. I şi II*, Rotaprint IPI, 1984.

[11] V. Cruceanu, *Elemente de algebră liniară şi geometrie*, Centrul de multiplicare Univ. Iaşi, 1971.

[12] C. Fetecău, E. Sîrbu, *Probleme de geometrie analitică şi diferenţială*, Rotaprint UTI, 1993.

[13] D. Kléténik, *Problèmes de géométrie analytique*, Editions Mir, Moscou, 1981.

[14] C. Mihu, *Sisteme de ecuaţii liniare şi forme pătratice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1985.

[15] C. Mihu, I. P. Iambor, *Curbe plane*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1989.

[16] R. Miron, *Introducere vectorială în geometria analitică plană*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1970.

[17] Gh. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[18] V. Murgescu, Georgeta Teodoru, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Rotaprint IPI, 1980.

[19] E. Murgulecsu, N. Donciu, V. Popescu, *Geometrie analitică în spaţiu şi geometrie diferenţială, Culegere de probleme*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1974.

[20] Al. Neagu, *Geometrie*, Rotaprint UTI, 1996.

[21] Al. Neagu, Veronica Borcea, *Probleme de algebră şi ecuaţii diferenţiale*, Rotaprint UTI, 1993.

[22] V. Obădeanu, *Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Facla, Timişoara, 1981.

[23] I. Pop, *Curs de algebră*, Rotaprint Univ. “Al. I. Cuza” Iaşi, 1979.

[24] I. Pop, *Culegere de probleme de algebră liniară*, Rotaprint Univ. “Al. I. Cuza” Iaşi, 1982.

[25] I. P. Popescu, *Geometrie afină şi euclidiană*, Editura Facla, Timişoara, 1984.

[26] Gh. Procopiuc, *Geometrie analitică*, Rotaprint UTI, 1995.

[27] Gh. Procopiuc, *Matematică*, Univ. Tehnică “Gh. Asachi” Iaşi, 1999.

[28] Gh. Procopiuc, *Matematică, teorie şi aplicaţii*, Editura “Gh. Asachi” Iaşi, 2001.

[29] Gh. Procopiuc, N. Ionescu, *Algebră liniară şi geometrie*, Editura Tehnica - Info, Chişinău, 2002.

[30] M. Roşculeţ, *Algebră liniară, geometrie analitică şi geometrie diferenţială*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.

[31] Gh. D. Simionescu, *Noţiuni de algebră vectorială şi aplicaţii în geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1982.

[32] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, Odetta Mălăncioiu, *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.

[33] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, Odetta Mălăncioiu, *Algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.