CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Vom spune că numărul natural $n \geq 3$ are proprietatea (P) dacă există numerele naturale nenule a şi k astfel încât:

$$n = a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+k).$$

a) Demonstrați că numărul 14 are proprietatea (P).

b) Demonstrați că numărul 16 nu are proprietatea (P).

c) Care dintre numerele 2013 şi 2^{2013} are proprietatea (P)?

Soluție:

a) $14 = 2+3+4+5$ **2p**

b) $16 = a+(a+1)+...+b$, $\Rightarrow$ $b \leq 8$ şi analizăm situațiile posibile **2p**

c) $a+(a+1)+(a+2)+...+b = \dfrac{(a+b)\cdot(b-a+1)}{2}$ **1p**

$2013 = \dfrac{(a+b)\cdot(b-a+1)}{2}$ şi alegând $b-a+1=2$ şi $a+b=2013$ $\Rightarrow$ $a=1006$, $a=1007$ **1p**

$2^{2013} = \dfrac{(a+b)\cdot(b-a+1)}{2}$ $\Rightarrow 2^{2014} = (a+b)\cdot(b-a+1)$, imposibil deoarece $(a+b)\cdot(b-a+1)$ este produs de doi factori cu parități diferite. **1p**

2. Fie funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 10x^2 - x\sqrt{2013} + 45$. Se cere:

a) Determinați $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $\dfrac{\sqrt{2013}}{20} \in [n;\ n+1]$.

b) Demonstrați că $\min f < 0$, unde $\min f$ este cea mai mică valoare $f(x)$, cu $x \in \mathbb{Z}$.

c) Demonstrați că pe graficul funcției f există un singur punct cu ambele coordonate numere întregi.

Soluție:

a) $\dfrac{\sqrt{2013}}{20} \in [n;\ n+1] \Leftrightarrow \dfrac{2013}{400} \in \left[n^2;\ (n+1)^2\right] \Leftrightarrow n=2$ **2p**

b) $x_V = \dfrac{\sqrt{2013}}{20} \in (2;3)$ **1p**

f descrescătoare pe $(-\infty;\ x_V] \cap \mathbb{Z}$ şi crescătoare pe $[x_V;\ +\infty) \cap \mathbb{Z}$ **1p**

$f(3) - f(2) = 50 - \sqrt{2013} > 0$, deci $\min f = f(2) = 85 - 2\sqrt{2013} < 0$ **1p**

c) $M(a;\ b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b \Leftrightarrow 10a^2 - \sqrt{2013}\cdot a + 45 = b$ **1p**

$\Leftrightarrow a\cdot\sqrt{2013} = 10a^2 + 45 - b$ şi cum $\sqrt{2013}$ este irațional, singurul punct de pe grafic care are coordonatele numere întregi este $M(0;\ 45)$ **1p**

3. Fie triunghiul ABC, punctul M interior triunghiului şi A', B', C' simetricele punctului M faţă de mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB.

a) Demonstraţi că pentru orice punct O din planul triunghiului au loc relaţiile:

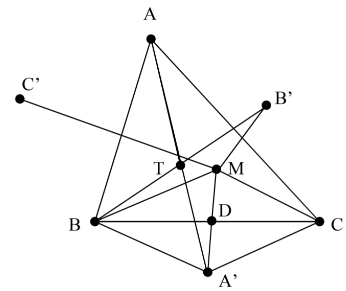
(i) $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

(ii) $\overrightarrow{AA'}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}$

b) Dacă T este mijlocul segmentului $[AA']$, demonstraţi că punctele B, T şi B' sunt coliniare.

c) Demonstraţi că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.

Soluţie:



a) Conform figurii, $[BMCA']$ este paralelogram de centru D

$\Rightarrow\ 2\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

………………………………………………………… **2p**

$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA'}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}$

………………………………………………………… **1p**

b) $\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{BO}+\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}}{2}$

………………………………………………………… **1p**

$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}$ ………………………………………………………… **1p**

$\overrightarrow{BT}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$, deci B, T şi B' sunt coliniare ………………………………………… **1p**

c) AA', BB' şi CC' sunt concurente în T ………………………………………………… **1p**

Notă: La subpunctele b) şi c) se acordă punctaj maxim şi în cazul prezentării soluţiei sintetice, pornind de la observaţia că $[MBA'C]$, $[MCB'A]$, $[MAC'B]$ sunt paralelograme, din care rezultă că sunt paralelograme şi $[ABA'B']$, $[BCB'C']$, $[CAC'A']$.

4. Un OZN se deplasează pe o traiectorie plană parcurgând secundă după secundă câte un segment de dreaptă de două ori mai lung decât în secunda precedentă. Considerând că în prima secundă OZN-ul a parcurs doar $10\,m$, se cere:

a) Determinaţi după câte secunde drumul străbătut de OZN depăşeşte $10\,km$.

b) Demonstraţi că nu este posibil ca după un anumit număr natural de secunde OZN-ul să ajungă exact în punctul de plecare.

Soluţie:

a) Fie A_0 punctul de plecare, respectiv punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ în care ajunge OZN-ul după exact $1, 2, 3, ..., n$ secunde, unde $n\in\mathbb{N}^*$, atunci lungimea drumului parcurs de OZN după exact $n\in\mathbb{N}^*$ secunde este $L_n=A_0A_1+A_1A_2+A_2A_3+...+A_{n-1}A_n$ ………………………………… **1p**

cu $A_0A_1=10\ m$, $A_1A_2=2\cdot 10\ m$, $A_2A_3=2^2\cdot 10\ m$, …, $A_{n-1}A_n=2^{n-1}\cdot 10\ m$ …………………….. **2p**

deci $L_n=10\cdot\left(1+2+2^2+...+2^{n-1}\right)=10\cdot\left(2^n-1\right)$ metri. ………………………………… **1p**

şi drumul parcurs de OZN depăşeşte 10 *km* după 10 secunde. ………………………………….. **1p**

b) Indiferent de forma traiectoriei parcursă de OZN, avem $L_n=10\cdot\left(2^n-1\right)\geq A_0A_n$ ……………… **1p**

dar în secunda $(n+1)$ OZN-ul parcurge $A_nA_{n+1}=2^n\cdot 10\ m$, deci $A_nA_{n+1}>A_0A_n$, deci pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc $A_{n+1}\neq A_0$ ……………………………………………………… **1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Fie $x_n = \alpha^n + \alpha^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha = 2+\sqrt{3}$. Se cere:

a) Calculați x_1 şi x_2.

b) Demonstrați că: $\alpha^2 = 4\alpha - 1; \alpha^{-2} = 4\alpha^{-1} - 1; \alpha^n = 4\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2}$ şi $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$, oricare ar fi $n \geq 3$.

c) Demonstrați că x_n este număr natural nenul, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Demonstrați că $\{\alpha^n\} = 1 - \alpha^{-n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x.

Soluție:

a) $x_1 = \alpha + \alpha^{-1} = \left(2+\sqrt{3}\right) + \left(2-\sqrt{3}\right) = 4$, $x_2 = \alpha^2 + \alpha^{-2} = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 14$ **2p**

b) Calcul direct (pentru primele două egalități) **1p**

$\alpha^n = \alpha^{n-2} \cdot \alpha^2 = \alpha^{n-2} \cdot (4\alpha - 1) = 4\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2}$ **1p**

c) $x_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 4 \cdot \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n-1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{n-1}\right] - \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n-2} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{n-2}\right]$............ **1p**

$x_n = 2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{p} C_n^{2k} 2^{n-2k} \left(\sqrt{3}\right)^{2k}\right) \in \mathbb{N}^*$, unde $p = \left[\frac{n}{2}\right]$.. **1p**

d) $\{\alpha^n\} = \left\{\underbrace{\alpha^n + \alpha^{-n} - 1}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{1 - \alpha^{-n}}_{\in (0;\, 1)}\right\} = 1 - \alpha^{-n}$ **1p**

2. a) Demonstrați inegalitățile:

(i) $2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) \geq (a+b)^2$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, oricare ar fi $x, a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) $(2 + \sin x - y)^2 + (y - \cos x)^2 \geq 3 - 2\sqrt{2}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați ecuația $(2 + \sin x - y)^2 + (y - \cos x)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluție:

a)

(i) $2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ **1p**

(ii) $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow (a \sin x + b \cos x)^2 \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a \cos x - b \sin x)^2$ **2p**

(iii) Conform cu (i), $2 \cdot \left[(2 + \sin x - y)^2 + (y - \cos x)^2\right] \geq (2 + \sin x - \cos x)^2$,

cu egalitate dacă şi numai dacă $2 + \sin x - y = y - \cos x$ .... **1p** dar, conform cu (ii), $|\sin x-\cos x|\le\sqrt{2}\Rightarrow(2+\sin x-y)^2+(y-\cos x)^2\ge 3-2\sqrt{2}$ ……………**1p**

b) Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}$ şi $2+\sin x-y=y-\cos x$,

deci $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ………………………………………………………………….. **1p**

şi $y=1$. ……………………………………………………………………………………… **1p**

3. Un program de calculator simulează o traiectorie, curbă închisă, de lungime 15 *cm* şi pe care două mobile pornesc din acelaşi punct dar în sensuri opuse, respectiv cu legile de deplasare date de funcțiile $f(x)=x+2^x-1$ şi $g(x)=x+\log_2(x+1)$, unde variabila $x\ge 0$ reprezintă momentul măsurat în secunde iar $f(x)$ şi $g(x)$ reprezintă distanța parcursă de cele două mobile de la momentul zero al simulării până la momentul $x\ge 0$, măsurată în centimetri. Se cere:
a) Calculați f(3) şi g(3).
b) Determinați momentul $x>0$ al primei întâlniri al celor două mobile.
c) Determinați de câte ori se întâlnesc cele două mobile în primele 7 secunde.
(se consideră că $x=0$ nu este moment de întâlnire).

<u>Soluție:</u>

a) f(3)=10, g(3)=5 .... **1p**

b) Considerând funcția $h:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$, $h(x)=f(x)+g(x)$, cum $h(3)=15$, rezultă că cele două mobile se întâlnesc prima dată după 3 secunde de la începutul mişcării **2p**

c) Cele două mobile se întâlnesc la fiecare moment $x\in(0,\infty)$ în care $h(x)=15\cdot n, n\in\mathbb{N}^*$............ **2p**

$h(7)=f(7)+g(7)=144=15\cdot 9+9$, ..……………………………………………………….. **1p**

Aşadar în primele 7 secunde cele două mobile se întâlnesc de 9 ori ..………………………….. **1p**

4. La un concurs de matematică au participat 101 elevi şi au avut de rezolvat un subiect format din patru probleme. Analizând lista rezultatelor, s-a constat că fiecare dintre cele patru probleme a fost rezolvată de cel puțin 51 de elevi.
a) Demonstrați că există un elev care a rezolvat cel puțin trei dintre cele patru probleme.
b) Demonstrați că există doi elevi, astfel încât fiecare dintre cele patru probleme a fost rezolvată de cel puțin unul dintre ei.

<u>Soluție:</u>

a) $51\cdot 4=204$ rezolvări posibile...…………………………………………………………… **1p**

Dacă fiecare elev ar fi rezolvat cel mult 2 probleme, s-ar fi totalizat cel mult 202 rezolvări …... **1p**

Deci cel puțin un elev a rezolvat cel puțin trei dintre cele patru probleme ……………………... **2p**

b) Conform punctului anterior, alegem elevul care a rezolvat cel puțin trei probleme…………….. **1p**

Dacă acel elev a rezolvat toate problemele alegem orice alt elev şi cei doi verifică cerința …… **1p**

Dacă acel elev a rezolvat doar trei probleme va exista un elev care a rezolvat problema nerezolvată de el şi alegând acei doi elevi cerința este verificată ……………………………… **1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Fie G mulțimea matricelor $A=(a_{ij})\in M_3(\mathbb{R})$, unde $|a_{ij}|=1$, oricare ar fi $i,j\in\{1;2;3\}$.

Se cere:

a) Dacă $A\in G$, demonstrați că $\det A$ este divizibil prin 4.

b) Dacă $A\in G$ şi $d=\det A$, demonstrați că $d^3=16d$.

c) Demonstrați că oricare ar fi $d\in\{-4;\ 0;\ 4\}$ există $A\in G$ cu $\det A=d$.

d) Determinați numărul elementelor mulțimii G.

Soluție:

a) Fie $A\in G$ şi $d=\det A$, atunci $d=\det A'$, unde A' este matricea obținută din matricea A prin sumarea celei de a treia coloane la primele două coloane (C_1+C_3, respectiv C_2+C_3) **2p**
Astfel pe primele două coloane din A' vor fi elemente 0, sau 2, sau -2, deci $\det A'$ se divide prin 4 $\Rightarrow \det A$ se divide prin 4 .... **1p**

b) Cum $|a_{ij}|=1$, calculând $d=\det A$ $\Rightarrow |d|\le 6$ şi conform punctului anterior $d\in\{-4;\ 0;\ 4\}$ **2p**

c) Spre exemplu,

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A_1=0,\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A_2=-4,\ A_3=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A_3=4$$ **1p**

d) are $2^9=512$ elemente **1p**

2. Un automobil se deplasează din oraşul Iaşi spre oraşul Roman. Spațiul parcurs de acesta, notat $s(t)$, $t\ge 0$, defineşte o funcție $s:[0;t_s]\to\mathbb{R}$ care verifică pe parcursul deplasării $s(0)=0$ şi $s(t)-s\left(\frac{t}{2}\right)=30t$, oricare ar fi $t\in[0;\ t_s]$, $t_s>0$ fiind momentul în care automobilul a ajuns la destinație, măsurat în ore. Distanța dintre cele două localități se consideră de 90 *km* şi se subînțelege că s este funcție continuă.

a) Demonstrați că $s(t)-s\left(\frac{t}{2^n}\right)=60t\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$, oricare ar fi $t\ge 0$ şi $n\in\mathbb{N}$.

b) Determinați expresia $s(t)$ a funcției.

c) Determinați cu ce viteză medie şi în cât timp este străbătută distanța Iaşi – Roman. (Reamintim că ecuația vitezei este $v:[0;t_s]\to\mathbb{R}$, $v(t)=s'(t)$).

Soluție:

a) Verificare **2p**

b) Cum $s:[0;t_s]\to\mathbb{R}$ este funcție continuă, trecând la limită pentru $n\to\infty$ în egalitatea $s(t)-s\left(\frac{t}{2^n}\right)=60t\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ se obține $s(t)=60t$ **3p**

c) $v(t)=s'(t)=60\ (km/h)$.. **1p**

şi $s(t)=90\ km \Rightarrow\ t_s=1{,}5\ h$ **1p**

3. a) Fie $a>0$ şi funcția $f:(-a;a)\to(0;+\infty)$ continuă pe $(-a;\,a)$, derivabilă în $x=0$, cu $f(0)=1$ şi $f'(0)=k$, $k\in\mathbb{R}$. Calculați $\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1^x+2^x+...+n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

<u>Soluție:</u>

a) f continuă în $x=0$ cu $f(0)=1\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to0}f(x)=1\Rightarrow$ nedeterminare 1^∞ **1p**

$L=\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left\{1+\left[f(x)-1\right]\right\}^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\frac{f(x)-1}{x}}=e^\alpha$, în condiția $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\alpha\in\overline{\mathbb{R}}$. **2p**

Cum $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\overset{def}{=}f'(0)=k$, $\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}}=e^k$ **2p**

b) Considerând $f(x)=\frac{1^x+2^x+...+n^x}{n}$, suntem în condițiile punctului anterior cu $k=\frac{1}{n}\cdot\ln(n!)$ şi în aceste condiții $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1^x+2^x+...+n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{n}\cdot\ln n!}=(n!)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{n!}$ **2p**

4. O lăcustă sare din punct în punct pe un plan, raportat la un sistem de axe ortogonale (xOy) şi parcurge astfel un traseu notat $M_1M_2M_3...$, unde $M_k(x_k;\,y_k)$, $k\in\mathbb{N}^*$, sunt punctele săriturilor iar coordonatele acestor puncte verifică $x_1=1$, $y_1=1$, $x_{k+1}=3x_k+y_k$, $y_{k+1}=x_k+2y_k$, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$. Considerând matricea $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}$, se cere:

a) Verificați egalitatea $\begin{pmatrix}x_{k+1}\\y_{k+1}\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix}$

b) Determinați coordonatele punctelor M_2, M_3 şi M_4.

c) Demonstrați că $A^n\neq I_2$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$

d) Determinați dacă există posibilitatea ca după un număr de sărituri lăcusta să ajungă din nou în M_1.

<u>Soluție:</u>

a) Verifică $\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_k+y_k\\x_k+2y_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{k+1}\\y_{k+1}\end{pmatrix}$.. **1p**

b) Calculează şi determină $M_2(4;\,3)$, $M_3(15;\,10)$, $M_4(55;\,35)$ **2p**

c) Inductiv rezultă că matricile $A^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{pmatrix}$ au toate elementele numere naturale strict pozitive, deci nenule şi astfel $A^n\neq I_2$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. **2p**

d) Lăcusta poate ajunge în M_1 numai dacă este posibilă egalitatea $\begin{pmatrix}x_{k+1}\\y_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ **1p**

dar această egalitate obligă $A^k=I_2$, deci lăcusta nu poate ajunge din nou în M **1p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Calculați:

a) $\int x^2 \cdot \sin x\, dx$, $x \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-1}^{1} x^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} dx$

c) $\int_{0}^{2} x(x-2) \cdot \sin \frac{\pi(x-1)}{3} dx$.

Soluție:

a) Fie $I = \int x^2 \cdot \sin x\, dx$, $x \in \mathbb{R}$. Se integrează prin părți.

$\left.\begin{matrix} u = x^2 \\ v' = \sin x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u' = 2x \\ v = -\cos x \end{matrix}\right\} \Rightarrow I = \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx = -x^2 \cdot \cos x + 2J$,

$J = \int x \cdot \cos x\, dx$ **1p**

$\left.\begin{matrix} u = x \\ v' = \cos x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u' = 1 \\ v = \sin x \end{matrix}\right\} \Rightarrow J = \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx = x \cdot \sin x + \cos x + C_1$ **1p**

$\Rightarrow\ I = 2x \cdot \sin x + (2 - x^2) \cdot \cos x + C$, $C \in \mathbb{R}$ **1p**

b) $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{3}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$, deci este funcție impară **1p**

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} dx = 0$ **1p**

c) $\int_{0}^{2} x(x-2) \cdot \sin \frac{\pi(x-1)}{3} dx = \int_{0}^{2} \left[(x-1)^2 - 1\right] \cdot \sin \frac{\pi(x-1)}{3} dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1) \cdot \sin \frac{\pi x}{3} dx = 0$.............. **2p**

2. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX + c$. Demonstrați afirmațiile:

a) Dacă f are rădăcina $x_1 = \sqrt{2}$ atunci are şi o rădăcină întreagă.

b) $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq y$.

Soluție:

a) $f \in \mathbb{Z}[X]$, $x_1 = \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2}$ **1p**

Cum $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = -a \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $x_3 = -a \in \mathbb{Z}$. **1p**

b) $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{(x^3 - y^3) + a \cdot (x^2 - y^2) + b(x - y)}{x - y}$ **1p**

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\left(x^2+xy+y^2\right)+a\cdot(x+y)+b\in\mathbb{Z}$$ **1p**

c) Fie $x_0\in\mathbb{Z}$ rădăcină $\Rightarrow \dfrac{f(x_0)-f(2013)}{x_0-2013}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x_0$ este întreg par. **1p**

Analog, $\dfrac{f(x_0)-f(2014)}{x_0-2014}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x_0$ este întreg impar **1p**

Contradicție. $\Rightarrow f$ nu are rădăcini întregi şi cum are coeficientul puterii dominante 1, $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ nu poate avea rădăcini raționale neîntregi, deci nu are rădăcini raționale ……………….. **1p**

3. Fie $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe cu legea de compoziție $x\circ y=xy+x+y$ şi submulțimea $G\subset\mathbb{C}$, $G=\left\{0;\ \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right\}$. Se cere:

a) Demonstrați că G este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{C}$ în raport cu operația "$\circ$" şi $(G;\circ)$ este grup comutativ.

b) Demonstrați că funcția $f:G\to M$, $f(x)=x+1$ este izomorfism de la $(G;\circ)$ la $(M;\cdot)$, unde $M=\left\{1;\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$ este grupul multiplicativ al rădăcinilor de ordin trei ale unității.

c) Calculați $z_{2013}=\underbrace{z\circ z\circ\ldots\circ z}_{2013\ factori}$, unde $z=\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.

Soluție:

a) Dacă $z_0=0$, $z_1=\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$, se verifică prin calcul direct, efectuând tabla operației:

$\circ$	z_0	z_1	z_2
z_0	z_0	z_1	z_2
z_1	z_1	z_2	z_0
z_2	z_2	z_0	z_1

deci are loc proprietatea de parte stabilă ………………………………………………………… **2p**

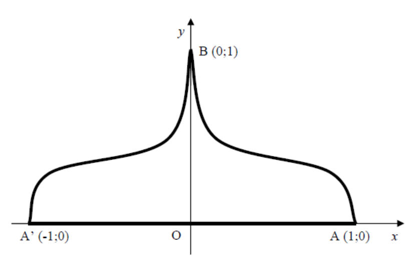
Comutativitatea, elementul neutru şi simetrizabilitatea se observă din tabla operației ………. **1p**

iar asociativitatea din $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)=(x+1)(y+1)(z+1)-1$ …………………......... **1p**

b) Bijectivitatea este evidentă şi se verifică $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$ ……………………………. **1p**

c) Folosind morfismul, $z_1\circ z_1\circ z_1=(z_1+1)^3-1=\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3-1=0=z_0$ dar $z_0=0$ este elementul neutru al grupului $(G;\circ)$ şi cum 2013 se divide cu 3, $\Rightarrow z_{2013}=\underbrace{z\circ z\circ\ldots\circ z}_{2013\ factori}=z_0=0$ ………… **2p**

4. Figura alăturată reprezintă schema unui ornament arhitectural, reprezentată grafic pe un reper cartezian ortogonal prin funcția $f:[-1;1]\to[0;1]$, $f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{|x|}}$ şi în care unitatea reperului semnifică metri. Se cere:



a) Justificați afirmația $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2\cdot\int_{0}^{1}f(x)\,dx$.

b) Demonstrați că funcția $g:[0;1]\to[0;1]$, $g(x)=f(x)$ este bijectivă şi determinați expresia funcției inverse, g^{-1}.

c) Folosind eventual punctul anterior, determinați aria ornamentului.

<u>Soluție:</u>

a) $f(-x)=f(x)$, deci f este funcție pară **1p**

şi implicit $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{1} f(x)dx$. **1p**

b) Considerând $g:[0;1]\to[0;1]$, $g(x)=f(x)$, ecuația $g(x)=y$ admite soluție $x=\left(y^3-1\right)^2\in[0;1]$ şi soluția este unică, ... **2p**

deci funcția g este bijectivă cu $g^{-1}:[0;1]\to[0;1]$, $g^{-1}(x)=\left(x^3-1\right)^2$. **1p**

c) Aria ornamentului este $A=2\cdot\int_0^1 g^{-1}(x)dx=...=\frac{9}{7}$ $\left(m^2\right)$ **2p**