CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*
ETAPA NAŢIONALĂ - 12 aprilie 2013

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A IX-A

1. Vom spune că numărul natural $n \geq 3$ are proprietatea (P) dacă există numerele naturale nenule a şi k astfel încât:

$$n = a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+k).$$

a) Demonstraţi că numărul 14 are proprietatea (P).

b) Demonstraţi că numărul 16 nu are proprietatea (P).

c) Care dintre numerele 2013 şi 2^{2013} are proprietatea (P)?

2. Fie funcţia $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 10x^2 - x\sqrt{2013} + 45$. Se cere:

a) Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $\frac{\sqrt{2013}}{20} \in [n;\ n+1]$.

b) Demonstraţi că $\min f < 0$, unde $\min f$ este cea mai mică valoare $f(x)$, cu $x \in \mathbb{Z}$.

c) Demonstraţi că pe graficul funcţiei f există un singur punct cu ambele coordonate numere întregi.

3. Fie triunghiul ABC, punctul M interior triunghiului şi A', B', C' simetricele punctului M faţă de mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB.

a) Demonstraţi că pentru orice punct O din planul triunghiului au loc relaţiile:

(i) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

(ii) $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$

b) Dacă T este mijlocul segmentului $[AA']$, demonstraţi că punctele B, T şi B' sunt coliniare.

c) Demonstraţi că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.

4. Un OZN se deplasează pe o traiectorie plană parcurgând secundă după secundă câte un segment de dreaptă de două ori mai lung decât în secunda precedentă. Considerând că în prima secundă OZN-ul a parcurs doar $10\,m$, se cere:

a) Determinaţi după câte secunde drumul străbătut de OZN depăşeşte $10\,km$.

b) Demonstraţi că nu este posibil ca după un anumit număr natural de secunde OZN-ul să ajungă exact în punctul de plecare.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*
ETAPA NAŢIONALĂ - 12 aprilie 2013

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A X-A

1. Fie $x_n = \alpha^n + \alpha^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha = 2+\sqrt{3}$. Se cere:

a) Calculaţi x_1 şi x_2.

b) Demonstraţi că: $\alpha^2 = 4\alpha - 1; \alpha^{-2} = 4\alpha^{-1} - 1; \alpha^n = 4\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2}$ şi $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$, oricare ar fi $n \geq 3$.

c) Demonstraţi că x_n este număr natural nenul, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Demonstraţi că $\{\alpha^n\} = 1 - \alpha^{-n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

2. a) Demonstraţi inegalităţile:

(i) $2 \cdot (a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, oricare ar fi $x, a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) $(2 + \sin x - y)^2 + (y - \cos x)^2 \geq 3 - 2\sqrt{2}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $(2 + \sin x - y)^2 + (y - \cos x)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Un program de calculator simulează o traiectorie, curbă închisă, de lungime 15 cm şi pe care două mobile pornesc din acelaşi punct dar în sensuri opuse, respectiv cu legile de deplasare date de funcţiile $f(x) = x + 2^x - 1$ şi $g(x) = x + \log_2(x+1)$, unde variabila $x \geq 0$ reprezintă momentul măsurat în secunde iar $f(x)$ şi $g(x)$ reprezintă distanţa parcursă de cele două mobile de la momentul zero al simulării până la momentul $x \geq 0$, măsurată în centimetri. Se cere:

a) Calculaţi f(3) şi g(3).

b) Determinaţi momentul $x > 0$ al primei întâlniri al celor două mobile.

c) Determinaţi de câte ori se întâlnesc cele două mobile în primele 7 secunde.

(se consideră că $x = 0$ nu este moment de întâlnire).

4. La un concurs de matematică au participat 101 elevi şi au avut de rezolvat un subiect format din patru probleme. Analizând lista rezultatelor, s-a constat că fiecare dintre cele patru probleme a fost rezolvată de cel puţin 51 de elevi.

a) Demonstraţi că există un elev care a rezolvat cel puţin trei dintre cele patru probleme.

b) Demonstraţi că există doi elevi, astfel încât fiecare dintre cele patru probleme a fost rezolvată de cel puţin unul dintre ei.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ - 12 aprilie 2013

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A XI A

1. Fie G mulţimea matricelor $A=(a_{ij})\in M_3(\mathbb{R})$, unde $|a_{ij}|=1$, oricare ar fi $i, j\in\{1;2;3\}$.

Se cere:

a) Dacă $A\in G$, demonstraţi că $\det A$ este divizibil prin 4.

b) Dacă $A\in G$ şi $d=\det A$, demonstraţi că $d^3=16d$.

c) Demonstraţi că oricare ar fi $d\in\{-4;\ 0;\ 4\}$ există $A\in G$ cu $\det A=d$.

d) Determinaţi numărul elementelor mulţimii G.

2. Un automobil se deplasează din oraşul Iaşi spre oraşul Roman. Spaţiul parcurs de acesta, notat $s(t)$, $t\geq 0$, defineşte o funcţie $s:[0;t_s]\to\mathbb{R}$ care verifică pe parcursul deplasării $s(0)=0$ şi $s(t)-s\left(\frac{t}{2}\right)=30t$, oricare ar fi $t\in[0;\ t_s]$, $t_s>0$ fiind momentul în care automobilul a ajuns la destinaţie, măsurat în ore. Distanţa dintre cele două localităţi se consideră de 90 *km* şi se subînţelege că s este funcţie continuă.

a) Demonstraţi că $s(t)-s\left(\frac{t}{2^n}\right)=60t\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$, oricare ar fi $t\geq 0$ şi $n\in\mathbb{N}$.

b) Determinaţi expresia $s(t)$ a funcţiei.

c) Determinaţi cu ce viteză medie şi în cât timp este străbătută distanţa Iaşi – Roman. (Reamintim că ecuaţia vitezei este $v:[0;t_s]\to\mathbb{R}$, $v(t)=s'(t)$).

3. a) Fie $a>0$ şi funcţia $f:(-a;a)\to(0;+\infty)$ continuă pe $(-a;\ a)$, derivabilă în $x=0$, cu $f(0)=1$ şi $f'(0)=k$, $k\in\mathbb{R}$. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1^x+2^x+...+n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

4. O lăcustă sare din punct în punct pe un plan, raportat la un sistem de axe ortogonale (xOy) şi parcurge astfel un traseu notat $M_1M_2M_3...$, unde $M_k(x_k;\ y_k)$, $k\in\mathbb{N}^*$, sunt punctele săriturilor iar coordonatele acestor puncte verifică $x_1=1$, $y_1=1$, $x_{k+1}=3x_k+y_k$, $y_{k+1}=x_k+2y_k$, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$. Considerând matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, se cere:

a) Verificaţi egalitatea $\begin{pmatrix}x_{k+1}\\ y_{k+1}\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}$

b) Determinaţi coordonatele punctelor M_2, M_3 şi M_4.

c) Demonstraţi că $A^n\neq I_2$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$

d) Determinaţi dacă există posibilitatea ca după un număr de sărituri lăcusta să ajungă din nou în M_1.

<u>**Notă**</u>: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ - 12 aprilie 2013

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A XII-A

1. Calculaţi:

a) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-1}^{1} x^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} dx$

c) $\int_{0}^{2} x(x-2) \cdot \sin \frac{\pi(x-1)}{3} dx$.

2. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX + c$. Demonstraţi afirmaţiile:

a) Dacă f are rădăcina $x_1 = \sqrt{2}$ atunci are şi o rădăcină întreagă.

b) $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq y$.

c) Dacă $f(2013)$ şi $f(2014)$ sunt numere întregi impare, atunci f nu are rădăcini raţionale.

3. Fie $\mathbb{C}$ mulţimea numerelor complexe cu legea de compoziţie $x \circ y = xy + x + y$ şi submulţimea $G \subset \mathbb{C}$, $G = \left\{0; \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}; \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right\}$. Se cere:

a) Demonstraţi că G este parte stabilă a mulţmii $\mathbb{C}$ în raport cu operaţia "$\circ$" şi $(G; \circ)$ este grup comutativ.

b) Demonstraţi că funcţia $f : G \to M$, $f(x) = x + 1$ este izomorfism de la $(G; \circ)$ la $(M; \cdot)$, unde $M = \left\{1; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$ este grupul multiplicativ al rădăcinilor de ordin trei ale unităţii.

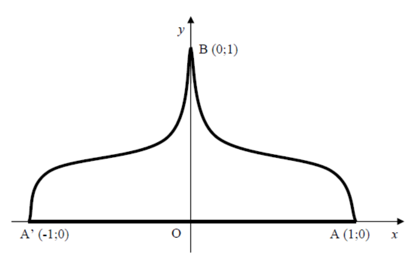
c) Calculaţi $z_{2013} = \underbrace{z \circ z \circ ... \circ z}_{2013 \text{ factori}}$, unde $z = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.

4. Figura alăturată reprezintă schema unui ornament arhitectural, reprezentată grafic pe un reper cartezian ortogonal prin funcţia $f : [-1; 1] \to [0; 1]$, $f(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{|x|}}$ şi în care unitatea reperului semnifică metri. Se cere:

a) Justificaţi afirmaţia $\int_{-1}^{1} f(x) dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} f(x) dx$.

b) Demonstraţi că funcţia $g : [0; 1] \to [0; 1]$, $g(x) = f(x)$ este bijectivă şi determinaţi expresia funcţiei inverse, g^{-1}.

c) Folosind eventual punctul anterior, determinaţi aria ornamentului.



Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*