INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Salariul mediu anual S(n) (exprimat în lei) al unui angajat al unei firme, funcţie de numărul n de produse realizate, $n\in\{100, 101, 102, ..., 2000\}$, se calculează după formula $S(n)=\frac{a\cdot n}{b-n}$, unde a şi b sunt numere naturale, cel puţin egale cu 2013, stabilite în raport cu aptitudinile şi rezultatele anterioare ale angajatului.

a) În cazul unui angajat pentru care a = 36000 şi b = 5000, calculaţi salariul maxim la care poate ajunge angajatul respectiv.

b) Considerăm doi angajaţi care pot primi acelaşi salariu maxim. Ştiind că $a_1=2a_2$, arătaţi că $b_1=2b_2-2000$.

Lucian Dragomir

Soluţie

a) Funcţia $S:\{100,101,102,...,2000\}\to\mathbb{R}$, $S(n)=\frac{a\cdot n}{b-n}$ este strict crescătoare:

$n<m\Rightarrow a\cdot n<a\cdot m$ şi $b-n>b-m\Rightarrow S(n)<S(m)$ (ţinem seama şi de faptul că $b>2000$) 3p

Salariul maxim pe care îl poate primi angajatul este $S(2000)=\frac{36000\cdot 2000}{5000-2000}=24000$ lei 2p

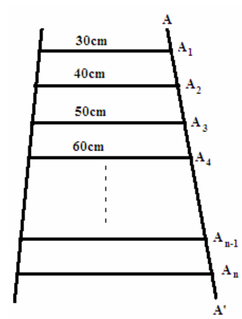
b) Din $\frac{2000\cdot a_1}{b_1-2000}=\frac{2000\cdot a_2}{b_2-2000}$, cerinţa se obţine imediat 2p

2. Dorim să construim o scară având formă trapezoidală cu dimensiunile treptelor din figura alăturată. Se ştie că $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n = 20$ cm, $AA_1 = A_nA' = 10$ cm şi AA' = 3,4 m.

a) Stabiliţi câte trepte are scara.

b) Stabiliţi care este numărul minim de scânduri cu lungimea de 3,5 m ce trebuie cumpărate pentru a putea construi scara.

c) Care este lungimea totală a materialului nefolosit şi care este procentul pierderii ?



Soluţie.

a) Fie n numărul de trepte. Între două trepte consecutive avem un segment $[A_iA_{i+1}]$ de lungime 20cm. $AA' = AA_1 + 20(n-1) + A_nA' \Rightarrow 340 = 10 + 20(n-1) + 10 \Rightarrow n = 17$ 2p

b) În primul rând avem nevoie de două scânduri pentru marginile scării 1p

Treptele $T_1, T_2, ..., T_{17}$ au lungimile de 30, 40, 50, ..., 190 cm.

Lungimea treptei T_i este $(20 + 10\cdot i)$ cm, $i=\overline{1,17}$.

Lungimea totală a materialului necesar pentru a construi treptele va fi de:

$\sum_{i=1}^{17}(20+10\cdot i)=20\cdot 17+10\cdot\frac{17\cdot 18}{2}=1870$ cm 1p

Cum $1870 = 350\cdot 5 + 120$, rezultă că sunt necesare cel puţin încă 6 scânduri 1p

Arată că există cel puţin o combinaţie astfel încât din cele 6 scânduri se pot construi treptele.

De exemplu: $T_{17} + T_{14} \to 3{,}5$m, $T_{16} + T_{15} \to 3{,}5$m, $T_{13} + T_{12} + T_4 \to 3{,}5$m, $T_{11} + T_{10} + T_8 \to 3{,}5$m, $T_9 + T_7 + T_6 + T_5 \to 3{,}5$m, $T_1 + T_2 + T_3 \to 1{,}2$m 1p
În total avem nevoie de 8 scânduri.
c) Avem $8 \cdot 3{,}5 = 28$ m, lungimea totală a scândurilor. S-au pierdut $2 \cdot 0{,}1$ m $= 0{,}2$ m (din margini) şi încă 2,3 m. Nu s-au folosit 2,5 m de scândură. Procentul pierderii este $\frac{250}{28}\% \simeq 8{,}93\%$ 1p

3. a) Dacă *M* este punct interior triunghiului ABC, demonstraţi că AM + BM < AC + BC.

b) Dacă $0 < x < \alpha$, $0 < y < \beta$ şi $\alpha + \beta < \pi$, demonstraţi că $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(x+y)} < \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin x + \sin y}$.

Soluție.

a) Fie $AM \cap BC = \{P\}$. În ΔBMP avem $BM < BP + PM$, iar în ΔAPC avem că $AP < PC + AC$. Adunând cele două inegalităţi, obţinem concluzia 3p

b) În ΔABC, notăm $m(A) = \alpha$ şi $m(B) = \beta$; atunci $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\pi - C) = \sin C$. Analog, în ΔABM notăm $m(MAB) = x$ şi $m(MBA) = y$; atunci $\sin(x+y) = \sin(\pi - M) = \sin M$ 1p

În ΔABC avem că $A_{\Delta ABC} = \dfrac{ac\sin B}{2} = \dfrac{ab\sin C}{2}$, de unde $c\sin B = b\sin C$; la fel se obține că $c\sin A = a\sin C$. Prin adunare, deducem că $AB(\sin\alpha + \sin\beta) = (AC + BC)\sin(\alpha+\beta)$ şi, analog, $AB(\sin x + \sin y) = (AM + BM)\sin(x+y)$. Folosind punctul a), obținem inegalitatea ce trebuia demonstrată 3p

4. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $T \in (MN)$ şi $D, P \in (BC)$.

Dacă (AD) este bisectoarea unghiului A şi $\dfrac{NC}{MB} = \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{TN}{TM}$, demonstraţi că:

a) $\overrightarrow{AD} = \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului, în notațiile obişnuite (BC = a, AB = c, AC = b).

b) AD este paralelă cu TP.

Sergiu Prisacariu

Soluție.

a) Se foloseşte teorema bisectoarei şi formula vectorului de poziție al punctului ce împarte un segment într-un raport dat 3p

b) Notăm $\dfrac{NC}{MB} = \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{TN}{TM} = k$ şi $NC = x$; atunci $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PC} = \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{PB} = \dfrac{-1}{k+1}\overrightarrow{BC}$ 1p

Din $\dfrac{NC}{NA} = \dfrac{x}{b-x}$ rezultă că $\overrightarrow{PN} = \dfrac{b-x}{b}\overrightarrow{PC} + \dfrac{x}{b}\overrightarrow{PA}$. Din $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{x}{ck-x}$ obținem că $\overrightarrow{PM} = \dfrac{ck-x}{ck}\overrightarrow{PB} + \dfrac{x}{ck}\overrightarrow{PA}$. Cum $\dfrac{TN}{TM} = k$, avem $\overrightarrow{PT} = \dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{PN} + \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{PM}$. Înlocuind, deducem că $\overrightarrow{TP} = \dfrac{x-b}{b(k+1)}\overrightarrow{PC} + \dfrac{x-ck}{c(k+1)}\overrightarrow{PB} + \dfrac{x(b+c)}{bc(k+1)}\overrightarrow{AP}$ 2p

După calcule, $\overrightarrow{TP} = \dfrac{x}{bc(k+1)}\left(c\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{x(b+c)}{bc(k+1)}\overrightarrow{AD}$, deci $AD \parallel PT$ 1p

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. În raport cu un reper cartezian xOy, considerăm un purice P care sare doar în puncte având ambele coordonate întregi. La o săritură, puricele se deplasează doar pe verticală sau pe orizontală. După o săritură nu este obligatoriu să schimbe direcţia de deplasare, dar respectă următoarea regulă: sare 3 unităţi, apoi 2 unităţi, 3 unităţi, 2 unităţi etc. De exemplu, dacă M se află iniţial în punctul (1,2), la prima mutare ar putea fi în punctul (1,5), iar apoi în (1,7) dacă păstrează direcţia, sau în (3,5), dacă îşi schimbă direcţia.

a) Dacă P se află iniţial în origine, demonstraţi că poate ajunge în punctul (2013, 0).

b) Dacă P se află iniţial în origine, demonstraţi că poate ajunge în orice punct cu ambele coordonate întregi din plan.

Mihai Monea şi Steluţa Monea

<u>Soluţie.</u>

a) Puricele se poate deplasa doar orizontal, astfel: după două sărituri ajunge în punctul (5,0), după patru ajunge în (10,0) şi, tot aşa, după 804 sărituri ajunge în (2010,0). La următoarea săritură va ajunge în (2013,0). 3p

b) Este suficient să demonstrăm că, dintr-un punct, poate ajunge în punctele vecine. 1p

Avem drumurile: (0,0) – (3,0) – (1,0), (0,0) – (–3,0) – (–1,0), (0,0) – (0,3) – (0,1) şi (0,0) – (0,–3) – (0,–1), care demonstrează că se poate ajunge pe punctele vecine originii şi, de aici, concluzia 3p

2. Se consideră numerele complexe u, v şi z astfel încât $|u| = |v| = 1$ şi $|u + v| = \sqrt{3}$.
Să se demonstreze că:

a) $z\cdot\bar{z}=|z|^2, (\forall) z\in\mathbb{C}$.

b) $u\cdot\bar{v}+\bar{u}\cdot v=1$.

c) $|u-v|=1$.

<u>Soluţie.</u>

a) Dacă $z = x + i\cdot y$, $x,y\in\mathbb{R}$, atunci $\bar{z}=x-i\cdot y$ şi $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$ 1p

b) $|u+v|^2=3 \Leftrightarrow (u+v)(\bar{u}+\bar{v})=3 \Leftrightarrow u\cdot\bar{v}+\bar{u}\cdot v=1$ 3p

c) $|u-v|^2=(u-v)(\bar{u}-\bar{v})=u\cdot\bar{u}+v\cdot\bar{v}-(u\cdot\bar{v}+\bar{u}\cdot v)=1 \Leftrightarrow |u-v|=1$ 3p

3. a) Demonstraţi că $\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}=\operatorname{tg}^6 x; \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) Determinaţi toate numerele naturale m pentru care $\dfrac{\sin^m x-\operatorname{tg}^m x}{\cos^m x-\operatorname{ctg}^m x}=\operatorname{tg}^{3m} x,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Soluție.

a) Demonstrează egalitatea 2p

b) În particular, relația din enunț are loc şi pentru $x = \frac{\pi}{3}$. Înlocuind şi efectuând calculele, obținem că $\left(\left(\sqrt{3}\right)^m - 1\right)\left(2^m - \left(\sqrt{3}\right)^m - 1\right) = 0$. Întrucât $m \neq 0$ (altfel s-ar anula numitorul fracției din enunț), prima paranteză este nenulă. Rămâne că se anulează a doua paranteză. 3p

Găsim ecuația exponențială $\left(\frac{1}{2}\right)^m + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m = 1$. Cum $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(m) = \left(\frac{1}{2}\right)^m + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m$ este o funcție strict descrescătoare, fiind suma a două funcții exponențiale de baze subunitare, f va fi injectivă. Întrucât f(m) = f(2) = 1, rezultă că singura soluție a ecuației este m = 2. .... 2p

4. Karina aruncă de 2012 ori o monedă, iar Andrada aruncă de 2013 ori o monedă. Care este probabilitatea ca Andrada să obțină stema de mai multe ori decât Karina?

Soluție.

Notăm cu p probabilitatea ca, după cele 2012 aruncări ale Karinei şi primele 2012 aruncări ale Andradei, cele două fete să aibă acelaşi număr de apariții ale stemei. În acel moment, probabilitatea ca Andrada să aibă mai multe apariții ale stemei este egală cu probabilitatea de a avea mai puține apariții ale stemei, ambele evenimente având probabilitatea $\frac{1-p}{2}$. 2p

După cea de-a 2013 aruncare, Andrada obține stema de mai multe ori decât Karina dacă: i) în primele 2012 aruncări a obținut de mai multe ori stema, indiferent de rezultatul ultimei aruncări sau ii) în primele 2012 aruncări fetele au obținut de acelaşi număr de ori stema, iar la ultima aruncare Andrada obține stema. 3p

Astfel, probabilitatea dorită este $\frac{1-p}{2} + \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$. 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ 12 aprilie 2013

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \text{ sunt numere naturale, prime și distincte}\right\}$.

a) Demonstrați că orice matrice A din G are determinant nenul.
b) Dacă $B\in G$, arătați că detB este număr impar dacă și numai dacă suma elementelor matricei B este număr impar.

Mihai Monea și Steluța Monea

<u>Soluție.</u>

a) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G$. Dacă prin absurd, detA = 0, atunci a·d = b·c. Ar rezulta de aici că a divide pe b sau pe c, ceea ce este fals (b și c sunt prime) 3p

b) Fie $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G$; detB = a·d – b·c este impar ⇔ a·d și b·c au parități diferite ⇔ exact unul dintre numerele a, b, c, d este par (mai exact egal cu 2) ⇔ a + b + c + d este număr impar 4p

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{|x^2-x|}$. Determinați punctele de intersecție dintre graficul funcției f și asimptota către $-\infty$ la graficul lui f.

<u>Soluție.</u>

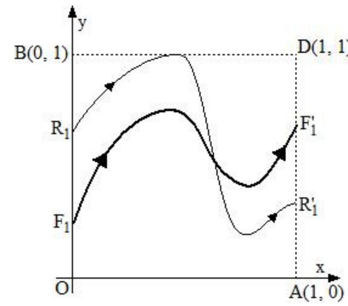
Ecuația asimptotei oblice la G_f spre $-\infty$ este $y=-x+\frac{1}{2}$ 4p

Din $\sqrt{|x^2-x|}=-x+\frac{1}{2}$ obținem că $|x^2-x|=x^2-x+\frac{1}{4}$, cu unica soluție acceptabilă $x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 2p

Punctul de intersecție căutat este $M\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 1p

3. În desenul alăturat sunt evidențiate două trasee continue: unul parcurs de o furnică $F_1 \to F_1'$ şi altul parcurs de o râmă $R_1 \to R_1'$. Arătați că există două puncte, $F(x_F, y_F)$ pe traseul furnicii şi $R(x_R, y_R)$ pe traseul râmei, cu proprietatea $x_R + y_F + y_R = 1 + x_F$.

Lucian-Georges Lăduncă



Soluție.

Traseul furnicii intersectează prima bisectoare cel puțin o dată (teorema de punct fix).

Fie $F(x_F, y_F)$ un astfel de punct, deci $x_F = y_F$ 3p

Traseul urmat de râmă intersectează cel puțin o dată segmentul AB.

Fie $R(x_R, y_R)$ un astfel de punct, deci $y_R = 1 - x_R$ 3p

Atunci $x_R + y_F + y_R = x_R + x_F + 1 - x_R = 1 + x_F$ 1p

4. Fie mulțimea $U = \left\{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = X\right\}$ şi matricea $K = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Demonstrați că matricea K nu se poate scrie ca o sumă finită de matrice din mulțimea U.

Soluție

Fie $X \in U$. Demonstrăm că $\mathrm{tr}X \in \{0, 1, 2\}$.

$X \in U \Rightarrow X^2 = X$.

Avem două cazuri:

i) Dacă X este inversabilă, atunci prin înmulțire cu X^{-1} a egalității precedente, se obține $X = I_2 \Rightarrow \mathrm{tr}X = 2$ 2p

ii) Dacă X nu este inversabilă, atunci $\det X = 0$. Din teorema Cayley – Hamilton deducem:

$X^2 - (\mathrm{tr}X) \cdot X = O_2 \Rightarrow X - (\mathrm{tr}X) \cdot X = O_2$.

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $(1-a-d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a(1-a-d) = 0 \\ d(1-a-d) = 0 \end{cases} \Rightarrow (a+d)[1-(a+d)] = 0 \Rightarrow$

$a+d = \mathrm{tr}(X) = 0$ sau $a + d = \mathrm{tr}X = 1$ 3p

Presupunem prin absurd că $\exists\, X_1, X_2, ..., X_n \in U$ cu proprietatea $K = X_1 + X_2 + ... + X_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{tr}K = \mathrm{tr}X_1 + \mathrm{tr}X_2 + ... + \mathrm{tr}X_n$ 1p

Dar $\mathrm{tr}K = 1 + \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $\mathrm{tr}X_1 + \mathrm{tr}X_2 + ... + \mathrm{tr}X_n \in \mathbb{N}$, contradicție 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

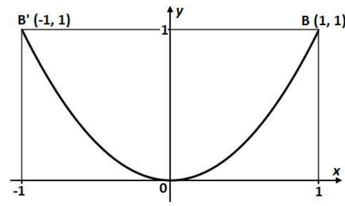
ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Cătălin oferă prietenei sale, de 8 Martie, o broşă de aur în formă de parabolă, ca în figura alăturată.
Calculaţi lungimea acestei broşe.



Notă: Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă, atunci graficul lui f are lungimea egală cu $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

Soluţie:

Graficul având forma de parabolă, funcţia căutată este de tipul $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ 1p

Din condiţiile $f(-1)=f(1)=1$, $f(0)=0 \Rightarrow a=1$, $b=c=0$ 1p

Avem $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$; $f(x)=x^2$, $\forall x\in[-1,1]$.

Lungime broşă: $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4x^2}\,dx=2\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=4\int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\,dx$ 1p

$\int\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)\right)+C$ 3p

Finalizare $L=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ 1p

2. Se consideră mulţimea $A=\left\{a+bi \mid a\in(-1;1), b\in(0,1], a^2+b^2=1\right\}$.

a) Demonstraţi că, oricare ar fi $x, y\in A$, există un unic $z\in A$ cu proprietatea că $z^2 = x\cdot y$.

b) Pe mulţimea A definim operaţia "*" prin $x * y = z$, unde z este unicul număr determinat la punctul anterior. Demonstraţi că legea "*" este comutativă, dar nu este asociativă.

Mihai Monea şi Steluţa Monea

Soluţie:

a) Observăm că $A=\left\{\cos\alpha+i\sin\alpha \mid \alpha\in(0,\pi)\right\}$. Dacă $x=\cos u+i\sin u$, $y=\cos v+i\sin v$ sunt din A, se arată că $z=\cos\frac{u+v}{2}+i\sin\frac{u+v}{2}$ este unicul element din A cu proprietatea că $z^2=x\cdot y$ 3p

b) Justificarea comutativităţii 2p

Un contraexemplu pentru asociativitate 2p

3. a) Calculați $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx$.

b) Demonstrați că există $t \in (0,1)$ astfel încât $\int_0^{\pi} x^t \cdot \sin x dx = \sqrt[10]{2013}$.

<u>Soluție:</u>

a) $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx = \int_0^{\pi} x \cdot (-\cos x)' dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$ 2p

b) Fie $f(t) = \int_0^{\pi} x^t \cdot \sin x dx$; $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$

$f(1) = \pi$; $f(0) = 2$ 1p

$2 < \sqrt[10]{2013} < 3 < \pi$ 1p

f continuă 1p

Proprietatea lui Darboux pentru f asigură că $\exists\ t \in (0, 1)$ astfel încât $f(t) = \sqrt[10]{2013}$ 2p

4. Fie $\mathcal{P}$ mulțimea polinoamelor care au toți coeficienții din mulțimea {-1, 1} şi toate rădăcinile reale.

a) Polinomul $x^3 + x^2 + x + 1$ este din $\mathcal{P}$?

b) Dacă $f \in \mathcal{P}$, grad $f \geq 2$ şi are rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n$, demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 3$.

c) Arătați că orice polinom din mulțimea $\mathcal{P}$ are gradul mai mic sau egal cu 3.

<u>Soluție.</u>

a) $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x + i)(x - i)$, cu rădăcinile -1, i, -i. Aşadar $x^3 + x^2 + x + 1 \notin \mathcal{P}$ 2p

b) $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n) = s_1^2 - 2s_2$ 1p

Dar $s_1 \in \{-1, 1\}$, $s_2 \in \{-1, 1\}$ şi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 3$ 1p

c) Din inegalitatea mediilor $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n} \geq \dfrac{n}{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + ... + \frac{1}{x_n^2}} \Rightarrow$

$\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)\left(\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + ... + \dfrac{1}{x_n^2}\right) \geq n^2; \left(x_i \in \mathbb{R}^*; \forall i = \overline{1,n}\right)$ 1p

Dacă, prin absurd, ar exista un polinom din $\mathcal{P}$ cu gradul $n \geq 4$ şi rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, atunci:

$\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + ... + \dfrac{1}{x_n^2} \geq \dfrac{n^2}{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \dfrac{n^2}{3} \geq \dfrac{16}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_1x_3} + ... + \dfrac{1}{x_{n-1}x_n}\right) \geq \dfrac{16}{3}$, contradicție

deoarece $\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}\right)^2 = \left(\dfrac{s_{n-1}}{s_n}\right)^2 = 1$ şi $\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_1x_3} + ... + \dfrac{1}{x_{n-1}x_n} = \dfrac{s_{n-2}}{s_n} \in \{-1;1\}$ 2p