INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

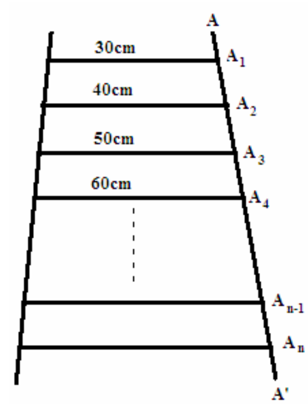
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A IX-A

1. Salariul mediu anual S(n) (exprimat în lei) al unui angajat al unei firme, funcție de numărul n de produse realizate, $n \in \{100, 101, 102, ..., 2000\}$, se calculează după formula $S(n) = \frac{a \cdot n}{b - n}$, unde a şi b sunt numere naturale, cel puțin egale cu 2013, stabilite în raport cu aptitudinile şi rezultatele anterioare ale angajatului.
a) În cazul unui angajat pentru care a = 36000 şi b = 5000, calculați salariul maxim la care poate ajunge angajatul respectiv.
b) Considerăm doi angajați care pot primi acelaşi salariu maxim. Ştiind că $a_1 = 2a_2$, arătați că $b_1 = 2b_2 - 2000$.

2. Dorim să construim o scară având formă trapezoidală cu dimensiunile treptelor din figura alăturată. Se ştie că $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n = 20$ cm, $AA_1 = A_nA' = 10$ cm şi AA' = 3,4 m.
a) Stabiliți câte trepte are scara.
b) Stabiliți care este numărul minim de scânduri cu lungimea de 3,5 m ce trebuie cumpărate pentru a putea construi scara.
c) Care este lungimea totală a materialului nefolosit şi care este procentul pierderii ?



3. a) Dacă *M* este punct interior triunghiului ABC, demonstrați că AM + BM < AC + BC.
b) Dacă $0 < x < \alpha$, $0 < y < \beta$ şi $\alpha + \beta < \pi$, demonstrați că $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(x+y)} < \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin x + \sin y}$.

4. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $T \in (MN)$ şi $D, P \in (BC)$.
Dacă (AD) este bisectoarea unghiului A şi $\frac{NC}{MB} = \frac{PC}{PB} = \frac{TN}{TM}$, demonstrați că:

a) $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului, în notațiile obişnuite (BC = a, AB = c, AC = b).

b) AD este paralelă cu TP.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A X-A

1. În raport cu un reper cartezian xOy, considerăm un purice P care sare doar în puncte având ambele coordonate întregi. La o săritură, puricele se deplasează doar pe verticală sau pe orizontală. După o săritură nu este obligatoriu să schimbe direcţia de deplasare, dar respectă următoarea regulă: sare 3 unităţi, apoi 2 unităţi, 3 unităţi, 2 unităţi etc. De exemplu, dacă M se află iniţial în punctul (1,2), la prima mutare ar putea fi în punctul (1,5), iar apoi în (1,7) dacă păstrează direcţia, sau în (3,5), dacă îşi schimbă direcţia.
a) Dacă P se află iniţial în origine, demonstraţi că poate ajunge în punctul (2013, 0).
b) Dacă P se află iniţial în origine, demonstraţi că poate ajunge în orice punct cu ambele coordonate întregi din plan.

2. Se consideră numerele complexe u, v şi z astfel încât $|u| = |v| = 1$ şi $|u + v| = \sqrt{3}$.
Să se demonstreze că:
a) $z \cdot \overline{z} = |z|^2, (\forall) z \in \mathbb{C}$.
b) $u \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot v = 1$.
c) $|u - v| = 1$.

3. a) Demonstraţi că $\dfrac{\sin^2 x - tg^2 x}{\cos^2 x - ctg^2 x} = tg^6 x;\ \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) Determinaţi toate numerele naturale m pentru care $\dfrac{\sin^m x - tg^m x}{\cos^m x - ctg^m x} = tg^{3m} x\ ,\ \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

4. Karina aruncă de 2012 ori o monedă, iar Andrada aruncă de 2013 ori o monedă. Care este probabilitatea ca Andrada să obţină stema de mai multe ori decât Karina?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XI-A

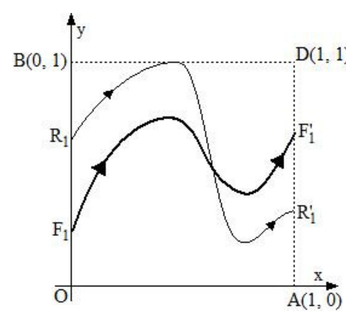
1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \text{ sunt numere naturale, prime şi distincte}\right\}$.

a) Demonstrați că orice matrice A din G are determinant nenul.

b) Dacă $B\in G$, arătați că detB este număr impar dacă şi numai dacă suma elementelor matricei B este număr impar.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{|x^2-x|}$. Determinați punctele de intersecție dintre graficul funcției f şi asimptota către $-\infty$ la graficul lui f.

3. În desenul alăturat sunt evidențiate două trasee continue: unul parcurs de o furnică $F_1 \to F_1'$ şi altul parcurs de o râmă $R_1 \to R_1'$. Arătați că există două puncte, $F(x_F, y_F)$ pe traseul furnicii şi $R(x_R, y_R)$ pe traseul râmei, cu proprietatea $x_R + y_F + y_R = 1 + x_F$.



4. Fie mulțimea $U=\{X\in M_2(\mathbb{R}) \mid X^2=X\}$ şi matricea $K=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Demonstrați că matricea K nu se poate scrie ca o sumă finită de matrice din mulțimea U.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

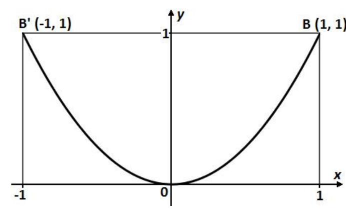
ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XII-A

1. Cătălin oferă prietenei sale, de 8 Martie, o broşă de aur în formă de parabolă, ca în figura alăturată.
Calculaţi lungimea acestei broşe.



Notă: Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă, atunci graficul lui f are lungimea egală cu $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

2. Se consideră mulţimea $A=\left\{a+bi \mid a\in(-1;1), b\in(0,1], a^2+b^2=1\right\}$.

a) Demonstraţi că, oricare ar fi $x, y \in A$, există un unic $z\in A$ cu proprietatea că $z^2 = x\cdot y$.

b) Pe mulţimea A definim operaţia "*" prin x * y = z, unde z este unicul număr determinat la punctul anterior. Demonstraţi că legea "*" este comutativă, dar nu este asociativă.

3. a) Calculaţi $\int_0^{\pi} x\cdot \sin x\,dx$.

b) Demonstraţi că există $t\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^{\pi} x^t\cdot \sin x\,dx=\sqrt[10]{2013}$.

4. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea polinoamelor care au toţi coeficienţii din mulţimea {-1, 1} şi toate rădăcinile reale.

a) Polinomul $x^3 + x^2 + x + 1$ este din $\mathcal{P}$?

b) Dacă $f \in \mathcal{P}$, grad $f \geq 2$ şi are rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n$, demonstraţi că $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=3$.

c) Arătaţi că orice polinom din mulţimea $\mathcal{P}$ are gradul mai mic sau egal cu 3.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*