INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

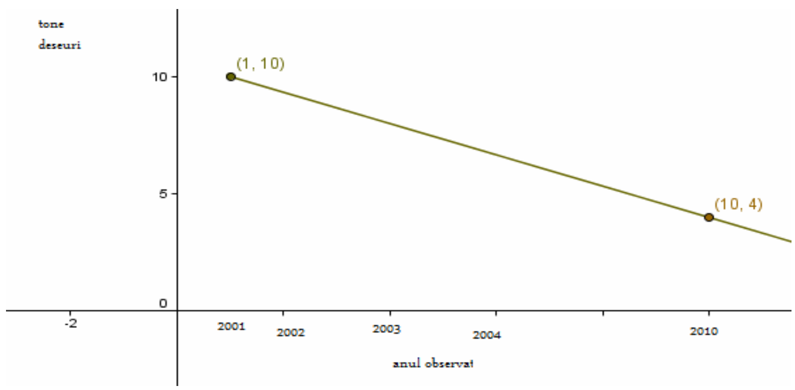
ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Deşeurile colectate şi apoi prelucrate dintr-un oraş au scăzut constant, conform graficului următor, începând cu anul 2001. Estimaţi în ce an, datorită măsurilor de protecţie a mediului, acestea vor ajunge, după prelucrare, la nivelul 0.



Lucian Dragomir

Soluţie:
Deoarece graficul indică o dreaptă, este vorba despre o funcţie exprimată printr-o expresie de gr. I , anume $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x) = ax + b 2p
Impunem condiţiile: f(2001) = 10 şi f(2010) = 4 .... 2p
Obţinem $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1344$ 2p
Impunem condiţia f(x) = 0 şi obţinem: anul 2016 .... 1p

2. Se consideră mulţimile: $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + ax + b - 1 = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + bx + a - 1 = 0\}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că, dacă x şi y sunt numere reale astfel încât $x + y \geq 0$, atunci $x \geq 0$ sau $y \geq 0$.
b) Demonstraţi că $a^2 - 4(b-1) + b^2 - 4(a-1) \geq 0$, pentru orice numere reale a şi b .
c) Demonstraţi că mulţimea $A \cup B$ este nevidă.

Soluţie:
a) Dacă, prin absurd, $x < 0$ şi $y < 0$, atunci $x + y < 0$, ceea ce contrazice ipoteza 1p
Urmează concluzia 1p
b) Avem $a^2 - 4(b-1) + b^2 - 4(a-1) = (a-2)^2 + (b-2)^2 \geq 0$ 2p
c) Din a) şi b) rezultă că $a^2 - 4(b-1) \geq 0$ sau $b^2 - 4(a-1) \geq 0$ 1p
Rezultă că mulţimea A este nevidă sau mulţimea B este nevidă 1p
Concluzia 1p

3. Să se determine numerele întregi a, b, c ştiind că în această ordine sunt în progresie aritmetică de rație 3, iar a^2, b^2, c^2 sunt în progresie geometrică, nu neapărat în această ordine.

<u>Soluție:</u>
Din ipoteză deducem că b = a + 3 şi c = a + 6 .... 1p
Cazul 1. Dacă b^2 este termenul din mijloc, atunci $b^2 = ac$ sau $b^2 = -ac$ 1p
Înlocuind b şi c găsim ecuații în a care nu au soluții 1p
Cazul 2. Dacă c^2 este termenul din mijloc, găsim a = -4, b = -1 şi c = 2 .... 2p
Cazul 3. Dacă a^2 este termenul din mijloc, găsim a = -2, b= 1 şi c = 4 .... 2p

4. Se consideră trapezul ABCD, cu bazele (AB) şi (CD) în care AB = 8, CD = 4, AD = 6, $m(\hat{A}) = 60^\circ$, iar punctul E este mijlocul laturii AD.

1) Să se determine lungimea diagonalei BD.

2) Calculați mărimea vectorului $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC}$.

<u>Soluție:</u>
a) $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A$ 2p
$BD = 2\sqrt{13}$ 1p
b) $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}\right)$ 1p
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}$ 1p
Obținem $\vec{v} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$ 1p
Concluzia $\left|\vec{v}\right| = 3\sqrt{13}$ 1p

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. a) Să se verifice egalitatea $\dfrac{1}{\log_{x^n\cdot y^m} A}=\dfrac{n}{\log_x A}+\dfrac{m}{\log_y A}$, unde A>1, $x, y>1$ iar $m, n\in\mathbb{R}^*$.

b) Dacă $a=\log_{18} N$ şi $b=\log_{12} N$, să se exprime $\log_2 N$ şi $\log_3 N$ în funcţie de a şi b.

<u>Soluţie:</u>

a) Aduce la baza A scriind :

$$\frac{1}{\log_{x^n\cdot y^m} A}=\log_A x^n+\log_A y^m=n\log_A x+m\log_A y=\frac{n}{\log_x A}+\frac{m}{\log_y A}$$ 3p

b) Folosind relaţia anterioară putem scrie:

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{\log_{2\cdot 3^2} N}=\dfrac{1}{\log_2 N}+\dfrac{2}{\log_3 N}$, iar $\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{\log_{2^2\cdot 3} N}=\dfrac{2}{\log_2 N}+\dfrac{1}{\log_3 N}$

Prin adunare $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=3\left(\dfrac{1}{\log_2 N}+\dfrac{1}{\log_3 N}\right)$, iar $\log_3 N=\dfrac{3ab}{2b-a}, \log_2 N=\dfrac{3ab}{2a-b}$ 4p

2. Pentru un triunghi ABC se cunosc: coordonatele unui vârf A(9, -9), ale centrului de greutate G(2, 0) şi ale mijlocului unei laturi N(-3, -3).

a) Demonstraţi că punctele A, G, N nu sunt coliniare.

b) Determinaţi coordonatele vârfului triunghiului coliniar cu A şi N .

c) Determinaţi ecuaţia laturii BC.

<u>Soluţie:</u>

a) Obţine $m_{AG}=-\dfrac{9}{7}$, $m_{GN}=\dfrac{3}{5}$, deci punctele A, G, N nu sunt coliniare 3p

b) Fie B vârful triunghiului coliniar cu A şi N. Atunci N este mijlocul segmentului AB, ceea ce conduce la $-3=\dfrac{9+x_B}{2}\Rightarrow x_B=-15$ iar $-3=\dfrac{-9+y_B}{2}\Rightarrow y_B=3$. Obţine B(-15, 3) 2p

c) Fie C cel de-al treilea vârf al triunghiului. Folosind coordonatele centrului de greutate, obţinem $2=\dfrac{-15+9+x_C}{3}\Rightarrow x_C=12$ iar $0=\dfrac{-9+3+y_C}{3}\Rightarrow y_C=6$ 1p

Obţine ecuaţia (BC): x – 9y + 42 = 0 .... 1p

3. Pentru a înveseli atmosfera cei patru colegi de birou au hotărât să organizeze o tombolă cu ocazia Crăciunului. Astfel fiecare a adus câte un cadou, cadourile au fost numerotate cu numere de la 1 la 4, iar prin extragerea unuia dintre cele patru bilețele pe care erau scrise numerele de la 1 la 4 să își aleagă cadoul numerotat cu respectivul număr.

a) În câte moduri se pot numerota cele patru cadouri ?

b) În câte dintre situațiile posibile nici o persoană nu primeşte cadoul cumpărat de ea ?

Soluție:

Fiind patru cadouri vom avea 4! = 24 moduri de a le numerota, deoarece ordinea contează 3p

Pentru a fixa lucrurile considerăm A, B, C respectiv D cele patru persoane şi admitem că A a adus cadoul numerotat cu 1, B a adus cadoul numerotat cu 2, C a adus cadoul numerotat cu 3, iar D a adus cadoul numerotat cu 4. Numărăm câte permutări fără puncte fixe putem construi (A≠1, B≠2, C≠3, D≠4) 1p

Permutările $(2,3,4,1),(2,1,4,3),(2,4,1,3)$ au pe primul loc pe 2 şi verifică cerința 2p

Vor fi tot câte trei permutări cu 3 şi respectiv 4 pe primul loc, deci un număr de 9 permutări verifică cerința 1p

4. Se consideră funcția $f_n : C \to C,\ \ f_n(x) = (1+x)^n,\ n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculați $f_6(i) + f_6(-i)$.

b) Demonstrați că dacă există $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|f_{2013}(z)| = |f_{2013}(-z)|$, atunci $z \in i \cdot \mathbb{R}$.

c) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ ştiind că $\left(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ..\right)^2 + \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ..\right)^2 = 1024$,

calculând eventual $f_n(i) \cdot f_n(-i)$.

Soluție:

Obține $f_6(i) = -8i$ 2p

$f_6(-i) = 8i$, iar suma $f_6(i) + f_6(-i) = 0$ 1p

Fie $z = a + bi,\quad a, b \in \mathbb{R}$. Din relația $|f_{2013}(z)| = |f_{2013}(-z)|$ deduce $|1+z| = |1-z|$ 1p

Finalizare : $\sqrt{(1+a)^2 + b^2} = \sqrt{(1-a)^2 + b^2} \Leftrightarrow a = 0, z = ib \in i\mathbb{R}$ 1p

Obține $f_n(i) = (1+i)^n = \left(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ..\right) + i \cdot \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ..\right)$ 1p

Obține $f_n(i) \cdot f_n(-i) = 2^n = \left(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ..\right)^2 + \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ..\right)^2 = 1024$,

de unde n = 10 .... 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013
Filiera tehnologică : profil tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Spunem că matricea $A\in M_3(\mathbb{R})$ se numeşte *perturbată* dacă are exact patru elemente egale cu 0 care formează un minor de ordinul al doilea construit cu liniile 1 şi 2 ale matricei, iar celelalte elemente sunt diferite între ele.

a) Daţi exemplu de o matrice *perturbată*.

b) Să se demonstreze că orice matrice *perturbată* nu este inversabilă.

c) Câte matrice perturbate având restul elementelor cifre se pot construi ?

Soluţie:

Un exemplu este matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\\5&4&3\end{pmatrix}$ 1p

O matrice perturbată poate fi numai una dintre următoarele :

$\begin{pmatrix}0&0&a\\0&0&b\\e&d&c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&x&0\\0&y&0\\t&z&u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m&0&0\\n&0&0\\p&q&r\end{pmatrix}$, unde variabilele sunt numere reale 3p

Se verifică, în fiecare caz, că determinantul este nul, deci matricea nu este inversabilă 1p

Notă: Verificarea cerinţei pentru un singur tip de matrice se va puncta cu 2 puncte

Elementele nenule pot fi alese în $A_9^5=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5=15120$ moduri 1p

Se obţine că un număr de $3\cdot A_9^5=45360$ matrice verifică cerinţa 1p

2. Dacă $A, B\in M_2(\mathbb{R})$ definim matricea $D(A,B)=A\cdot B-B\cdot A$

a) Verificaţi $D(A,A)=D(A,I_2)$

b) Demonstraţi că există $x, y, z\in\mathbb{R}$ astfel încât $D(A,B)=\begin{pmatrix}x&y\\z&-x\end{pmatrix}$.

c) Demonstraţi că $D^2(A,B)$ este de forma $\alpha\cdot I_2$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

Soluţie:

Obţine $D(A,A)=O_2$ şi $D(A,I_2)=O_2$ 2p

Alegând $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}m&n\\p&q\end{pmatrix}$

obţinem $AB=\begin{pmatrix}am+bp&an+bq\\cm+dp&cn+dq\end{pmatrix}$ $BA=\begin{pmatrix}am+cn&mb+dn\\pa+cq&pb+dq\end{pmatrix}$ 1p

Pentru $x=bp-cn$, $y=n(a-d)+b(q-m)$ şi $z=c(m-q)+p(d-a)$ rezultă cerinţa 2p

Pentru D(A,B) găsit anterior identifică $\alpha=x^2+y\cdot z$ astfel că $D^2(A,B)=\alpha\cdot I_2$ 2p

3. Se consideră funcțiile $f, g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ iar $g(x) = x \cdot \cos x - \sin x$.

a) Verificați relația $x^2 \cdot f'(x) = g(x)$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Demonstrați că $g(x) < 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Deduceți relația $\sin 1 > \frac{2}{\pi}$, utilizând eventual monotonia funcției f.

<u>Soluție:</u>

Obține $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, de unde rezultă cerința 2p

Obține $g'(x) = -x \cdot \sin x$ 1p

Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ deduce că $g'(x) < 0$, deci funcția g este strict descrescătoare 1p

Finalizare: Deoarece funcția g este strict descrescătoare pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $g(x) < 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 1p

Deoarece $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ iar $g(x) < 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $f'(x) < 0$, deci funcția f este strict descrescătoare pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 1p

Folosind monotonia funcției f rezultă că $f(1) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin 1 > \frac{2}{\pi}$ 1p

4. O companie aviatică are în dotare 20 de aeronave. După frecvența cu care se efectuează zborurile spre o destinație, compania are destinațiile împărțite astfel: destinații spre care zboară zilnic, destinații spre care zboară odată la două zile şi destinații spre care zboară odată la trei zile. Ştiind că luni au avut loc 20 de plecări, în primele trei zile au avut loc 46 de zboruri, iar numărul aeronavelor care execută curse zilnice este egal cu numărul aeronavelor care execută curse cu celelalte frecvențe la un loc, se cere:

a) Câte aeronave execută zboruri zilnic ?

b) Câte aeronave execută un zbor la trei zile ?

<u>Soluție:</u>

Notăm cu x numărul aeronavelor care zboară zilnic, cu y numărul aeronavelor care zboară odată la două zile şi cu z numărul aeronavelor care zboară odată la trei zile. Scrie relațiile :

$x + y + z = 20$ 2p

$x = y + z$ şi deduce că $x = 10$ 2p

$3x + 2y + z = 46$ 1p

Obține: $z = 4$ 2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + \hat{a}\cdot X + \hat{b} \in \mathbb{Z}_5[X]$

a) Verificaţi relaţia $\hat{t}^4 = \hat{1}$, pentru orice $\hat{t} \in \mathbb{Z}_5, \hat{t} \neq \hat{0}$.

b) Câte polinoame de forma anterioară există ?

c) Demonstraţi că pentru $\hat{b} = \hat{1}$ polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_5[X]$, oricare ar fi $\hat{a} \in \mathbb{Z}_5$.

Soluţie:

a) Pentru $\hat{t} \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$, se verifică prin calcul relaţia $\hat{t}^4 = \hat{1}$ 2p

b) Deoarece $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_5$, ele iau câte 5 valori, deci vor exista 25 de polinoame 2p

c) Exemplifică pentru fiecare situaţie că polinomul este reductibil, astfel :

Dacă $\hat{a} = \hat{0}$, polinomul se scrie astfel $f = \left(X^2 + \hat{3}\right)\left(X^2 + \hat{2}\right)$

Dacă $\hat{a} = \hat{1}$, polinomul se scrie astfel $f = \left(X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{4}X + \hat{3}\right)\left(X + \hat{2}\right)$

Dacă $\hat{a} = \hat{2}$, polinomul se scrie astfel $f = \left(X^3 + \hat{4}X^2 + X + \hat{1}\right)\left(X + \hat{1}\right)$

Dacă $\hat{a} = \hat{3}$, polinomul se scrie astfel $f = \left(X^3 + X^2 + X + \hat{4}\right)\left(X + \hat{4}\right)$

Dacă $\hat{a} = \hat{4}$, polinomul se scrie astfel $f = \left(X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{2}\right)\left(X + \hat{3}\right)$ 3p

2. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x}{e^{3^n \cdot x}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ iar $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3^n}} f_n(x)dx$.

a) Verificaţi egalitatea $3f_{n+1}(x) = f_n(3x)$, pentru orice număr natural nenul n.

b) Calculaţi I_1.

c) Demonstraţi că $I_{n+1} = \dfrac{1}{9}\cdot I_n$, utilizând relaţia de la punctul (a).

Soluţie:

a) Se obţine cu uşurinţă că $f_n(3x) = \dfrac{3x}{e^{3^n\cdot 3x}} = 3\cdot\dfrac{x}{e^{3^{n+1}\cdot x}} = 3\cdot f_{n+1}(x)$ 2p

b) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} f_1(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x}{e^{3x}}dx = \int_0^{\frac{1}{3}} x\cdot e^{-3x}dx = x\cdot\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-3x}dx = x\cdot\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{e^{-3x}}{-9}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}\cdot\left(1 - \frac{2}{e}\right)$

.... 2p

c) $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3^{n+1}}} f_{n+1}(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{3^{n+1}}} f_n(3x)\,dx$ 1p

Notând $t = 3x$, deducem $I_{n+1} = \dfrac{1}{9}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3^n}} f_n(t)dt = \frac{1}{9}\cdot I_n$ 2p

3. Se consideră inelul comutativ $(\mathbb{Z}_{10},+,\cdot)$.

a) Aflați suma elementelor nenule ale mulțimii $\mathbb{Z}_{10}$.

b) Elementele nenule ale mulțimii $\mathbb{Z}_{10}$ se organizează în următorul tablou pătratic $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} \\ \hat{7} & \hat{8} & \hat{9} \end{pmatrix}$.

Din tablou se scot 3 elemente, câte unul de pe fiecare linie şi coloană. Determinați suma elementelor rămase în tablou .

__**Soluție:**__

a) S = $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+...+\hat{9}=\hat{5}$ 2p

b) Gândind tabloul ca având forma $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \hat{3}+a & \hat{3}+b & \hat{3}+c \\ \hat{6}+a & \hat{6}+b & \hat{6}+c \end{pmatrix}$ cu a = $\hat{1}$, b = $\hat{2}$, c = $\hat{3}$ suma elementelor scoase după regula dată va fi $\hat{3}+\hat{6}+a+b+c=\hat{5}$ 3p

Suma elementelor rămase va fi egală cu $\hat{0}$ 2p

4. Un grup de prieteni, n fete şi 4 băieți, au ieşit la iarbă verde. Au disputat câte o partidă de badminton, fiecare cu fiecare, iar în urma confruntărilor fetele au câştigat de două ori în fața băieților. Ştiind că raportul dintre numărul total al victoriilor fetelor şi numărul total al victoriilor băieților este de $\frac{5}{16}$, se cere:

a) Câte partide au disputat băieții ?

b) Câte fete erau în grup ?

__**Soluție:**__

a) Băieții au disputat 4n partide cu fetele şi încă 6 partide între ei, în total 4n + 6 partide 2p

b) Fetele au câştigat $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ partide disputate între ele şi încă 2 .... 2p

Băieții au câştigat 6 + 4n – 2 partide 1p

Din relația $\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}+2}{4n+4}=\dfrac{5}{16}$, obținem n = 3 .... 2p