INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

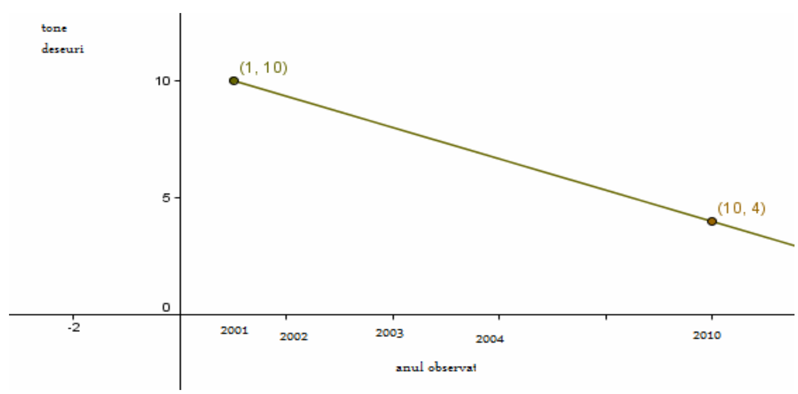
ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A IX-A

1. Deşeurile colectate şi apoi prelucrate dintr-un oraş au scăzut constant, conform graficului următor, începând cu anul 2001. Estimați în ce an, datorită măsurilor de protecție a mediului, acestea vor ajunge, după prelucrare, la nivelul 0.



2. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + ax + b - 1 = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + bx + a - 1 = 0\}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că, dacă x şi y sunt numere reale astfel încât $x + y \geq 0$, atunci $x \geq 0$ sau $y \geq 0$.

b) Demonstrați că $a^2 - 4(b-1) + b^2 - 4(a-1) \geq 0$, pentru orice numere reale a şi b .

c) Demonstrați că mulțimea $A \cup B$ este nevidă.

3. Să se determine numerele întregi a, b, c ştiind că în această ordine sunt în progresie aritmetică de rație 3, iar a^2, b^2, c^2 sunt în progresie geometrică, nu neapărat în această ordine.

4. Se consideră trapezul ABCD, cu bazele (AB) şi (CD) în care AB = 8, CD = 4, AD = 6, $m\left(\hat{A}\right) = 60^\circ$, iar punctul E este mijlocul laturii AD.

1) Să se determine lungimea diagonalei BD.

2) Calculați mărimea vectorului $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC}$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

Filiera tehnologică : profil tehnic

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. a) Să se verifice egalitatea $\dfrac{1}{\log_{x^n \cdot y^m} A} = \dfrac{n}{\log_x A} + \dfrac{m}{\log_y A}$, unde A>1, $x, y > 1$ iar $m, n \in \mathbb{R}^*$.

b) Dacă $a = \log_{18} N$ şi $b = \log_{12} N$, să se exprime $\log_2 N$ şi $\log_3 N$ în funcţie de a şi b.

2. Pentru un triunghi ABC se cunosc: coordonatele unui vârf A(9, -9), ale centrului de greutate G(2, 0) şi ale mijlocului unei laturi N(-3, -3).
a) Demonstraţi că punctele A, G, N nu sunt coliniare.
b) Determinaţi coordonatele vârfului triunghiului coliniar cu A şi N .
c) Determinaţi ecuaţia laturii BC.

3. Pentru a înveseli atmosfera cei patru colegi de birou au hotărât să organizeze o tombolă cu ocazia Crăciunului. Astfel fiecare a adus câte un cadou, cadourile au fost numerotate cu numere de la 1 la 4, iar prin extragerea unuia dintre cele patru bileţele pe care erau scrise numerele de la 1 la 4 să îşi aleagă cadoul numerotat cu respectivul număr.
a) În câte moduri se pot numerota cele patru cadouri ?
b) În câte dintre situaţiile posibile nici o persoană nu primeşte cadoul cumpărat de ea ?

4. Se consideră funcţia $f_n : C \to C,\ f_n(x) = (1+x)^n,\ n \in \mathbb{N}^*$
a) Calculaţi $f_6(i) + f_6(-i)$.
b) Demonstraţi că dacă există $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|f_{2013}(z)| = |f_{2013}(-z)|$, atunci $z \in i \cdot \mathbb{R}$.
c) Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ ştiind că $\left(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ..\right)^2 + \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ..\right)^2 = 1024$, calculând eventual $f_n(i) \cdot f_n(-i)$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ 12 aprilie 2013

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XI-A

1. Spunem că matricea $A\in M_3(\mathbb{R})$ se numeşte *perturbată* dacă are exact patru elemente egale cu 0 care formează un minor de ordinul al doilea construit cu liniile 1 şi 2 ale matricei, iar celelalte elemente sunt diferite între ele.
a) Daţi exemplu de o matrice *perturbată*.
b) Să se demonstreze că orice matrice *perturbată* nu este inversabilă.
c) Câte matrice perturbate având restul elementelor cifre se pot construi ?

2. Dacă $A, B\in M_2(\mathbb{R})$ definim matricea $D(A,B)=A\cdot B-B\cdot A$
a) Verificaţi $D(A,A)=D(A,I_2)$
b) Demonstraţi că există $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $D(A,B)=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$.
c) Demonstraţi că $D^2(A,B)$ este de forma $\alpha\cdot I_2$, unde $\alpha\in \mathbb{R}$.

3. Se consideră funcţiile $f,g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ iar $g(x)=x\cdot\cos x-\sin x$.
a) Verificaţi relaţia $x^2\cdot f'(x)=g(x)$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
b) Demonstraţi că $g(x)<0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
c) Deduceţi relaţia $\sin 1>\frac{2}{\pi}$, utilizând eventual monotonia funcţiei f.

4. O companie aviatică are în dotare 20 de aeronave. După frecvenţa cu care se efectuează zborurile spre o destinaţie, compania are destinaţiile împărţite astfel: destinaţii spre care zboară zilnic, destinaţii spre care zboară odată la două zile şi destinaţii spre care zboară odată la trei zile. Ştiind că luni au avut loc 20 de plecări, în primele trei zile au avut loc 46 de zboruri, iar numărul aeronavelor care execută curse zilnice este egal cu numărul aeronavelor care execută curse cu celelalte frecvenţe la un loc, se cere:
a) Câte aeronave execută zboruri zilnic ?
b) Câte aeronave execută un zbor la trei zile ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XII-A

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + \hat{a} \cdot X + \hat{b} \in \mathbb{Z}_5[X]$

a) Verificați relația $\hat{t}^4 = \hat{1}$, pentru orice $\hat{t} \in \mathbb{Z}_5, \hat{t} \neq \hat{0}$.

b) Câte polinoame de forma anterioară există ?

c) Demonstrați că pentru $\hat{b} = \hat{1}$ polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_5[X]$, oricare ar fi $\hat{a} \in \mathbb{Z}_5$.

2. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x}{e^{3^n \cdot x}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ iar $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3^n}} f_n(x)dx$.

a) Verificați egalitatea $3f_{n+1}(x) = f_n(3x)$, pentru orice număr natural nenul n.

b) Calculați I_1.

c) Demonstrați că $I_{n+1} = \dfrac{1}{9} \cdot I_n$, utilizând relația de la punctul (a).

3. Se consideră inelul comutativ $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$.

a) Aflați suma elementelor nenule ale mulțimii $\mathbb{Z}_{10}$.

b) Elementele nenule ale mulțimii $\mathbb{Z}_{10}$ se organizează în următorul tablou pătratic $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} \\ \hat{7} & \hat{8} & \hat{9} \end{pmatrix}$.

Din tablou se scot 3 elemente, câte unul de pe fiecare linie şi coloană. Determinaţi suma elementelor rămase în tablou .

4. Un grup de prieteni, n fete şi 4 băieți, au ieşit la iarbă verde. Au disputat câte o partidă de badminton, fiecare cu fiecare, iar în urma confruntărilor fetele au câştigat de două ori în fața băieților. Ştiind că raportul dintre numărul total al victoriilor fetelor şi numărul total al victoriilor băieților este de $\dfrac{5}{16}$, se cere:

a) Câte partide au disputat băieții ?

b) Câte fete erau în grup ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*