INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

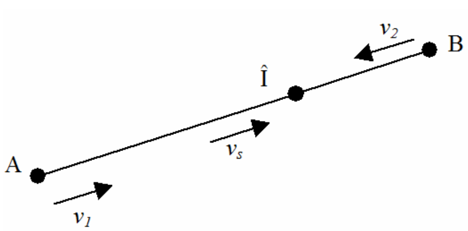
FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. O scară rulantă de 100 m lungime avansează cu viteza de 2 m/s. Doi copii pleacă de la fiecare dintre capetele scării cu viteza de 2,5 m/s. La ce distanţă faţă de capătul cel mai apropiat al scării se vor întâlni?
(*Reamintim că $S = v \cdot t$; spaţiul parcurs = viteza · timpul*).

Soluţie:
Desen:



.... 1p
$v_1 = 2$ m/s + 2,5 m/s = 4,5 m/s; v_1= 2,5 m/s – 2 m/s = 0,5 m/s 2p
Fie t momentul întâlnirii (în secunde):
$S_1 = 4{,}5$ t şi $S_2 = 0{,}5$ t 2p
4,5 t + 0,5 t = 100, rezultă t = 20 s, S_1 = 90 m şi S_2 = 10 m 1p
Se vor întâlni la 10 m faţă de capătul final al scării rulante 1p

2. Se consideră funcţia de gradul al II-lea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2(m-3)x + m + 3$, $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Determinaţi $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât graficul funcţiei să nu intersecteze axa Ox.

b) Determinaţi $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât funcţia să fie strict crescătoare pe intervalul $[-2, +\infty)$.

c) Determinaţi $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 0$,
unde x_1 şi x_2, sunt rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$.

Soluţie:
a) Impunem condiţia $y = f(x) \neq 0$ 1p
Este necesar ca $\Delta = -36m + 36 = -36(m-1) < 0$ 1p
Rezultă $m \in (1, +\infty)$ 1p
b) Impune condiţiile $m > 0$ şi $-\frac{b}{2a} = \frac{m-3}{m} \leq -2$ 1p
Rezultă $m \in (0, 1]$ 1p
c) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 0$ 1p
$\Delta = -36(m-1) = 0$, rezultă $m = 1$ 1p

3. Patru persoane P_1, P_2, P_3, P_4 se află la intrarea unui tunel întunecos prin care nu pot trece simultan decât două persoane. P_1, P_2, P_3, P_4 traversează tunelul în 1, 2, 5, respectiv 10 minute. Acestea dispun de o torță care arde doar 17 minute. Pot traversa cele patru persoane tunelul? Justificați răspunsul.

Soluție:

Prima dată traversează tunelul persoanele P_1 şi P_2, P_1 întorcându-se cu torța 1p
Au trecut 2 + 1 = 3 minute 1p
A doua oară traversează tunelul persoanele P_3 şi P_4, P_2 întorcându-se cu torța 2p
Au trecut încă 10 + 2 = 12 minute 1p
Apoi P_1 şi P_2 traversează din nou tunelul în 2 minute 1p
Aşadar, cele patru persoane pot traversa tunelul 1p

4. Fie triunghiul ABC cu $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ şi $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Pe laturile AB, AC şi BC se consideră punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$; $3\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA}$ şi $9\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PB}$

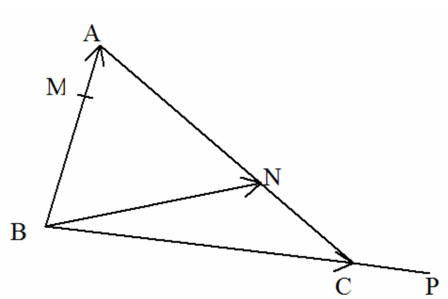
a) Să se exprime $\overrightarrow{BN}$ în funcție de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

b) Să se exprime $\overrightarrow{BN}$ în funcție de $\overrightarrow{BM}$ şi $\overrightarrow{BP}$.

c) Să se arate că punctele M, N, P sunt coliniare.

Soluție:

a) Desen



.... 1p

Exprimă $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$ 1p

b) Exprimă $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\vec{a}$ şi $\overrightarrow{BP} = \frac{9}{7}\vec{b}$ 1p

Găseşte $\overrightarrow{BN} = \frac{8}{15}\overrightarrow{BM} + \frac{7}{15}\overrightarrow{BP}$ 1p

c) Calculează $\overrightarrow{MN} = -\frac{7}{20}\vec{a} + \frac{12}{20}\vec{b}$ 1p

Calculează $\overrightarrow{NP} = -\frac{14}{35}\vec{a} + \frac{24}{35}\vec{b}$ 1p

Arată că $\overrightarrow{MN} = \frac{7}{8}\overrightarrow{NP}$, rezultă M, N, P coliniare 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

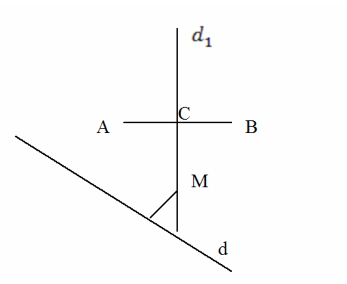
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Se consideră dreapta (d) de ecuație: $5x - 12y + 32 = 0$ şi punctele A(1, -1) şi B(5, -3). Aflați coordonatele punctului M egal depărtat de A şi B şi situat la distanța 4 față de dreapta (d).

Soluție:

Desenul:



.... 1p

MA = MB, rezultă M aparține mediatoarei segmentului AB 1p
Scrie ecuația mediatoarei $y = 2x - 8$ 1p
Alege un punct M de pe mediatoare $M(a, 2a - 8)$ 1p
Calculează distanța de la M la dreapta d folosind formula 1p
Rezolvă ecuația $d(M, d) = 4$ 1p
Găseşte coordonatele punctelor $M_1(4, 0)$ şi $M_2\left(\frac{180}{19}, \frac{208}{19}\right)$ 1p

2. Un credit de 10000 de lei este împrumutat pe termen de 2 ani în regim de dobândă compusă cu rata dobânzii de 10%. Care este rata dobânzii pe principiul dobânzii simple care aduce aceeaşi dobândă în acelaşi interval de timp?

Soluție:

Calculează capitalul după 2 ani cu dobânda compusă de 10 % :

$S_1 = S \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 = S \cdot \frac{121}{100} = 10000 \cdot \frac{121}{100} = 12100$ lei 2p

Calculează suma obținută din dobândă în 2 ani: 12100 – 10000 = 2100 lei 1p

Scrie formula capitalului după 2 ani în dobândă simplă:

$S_1 = S + 2 \cdot \frac{d}{100} \cdot S = 10000 + 2 \cdot 10000 \cdot \frac{d}{100} = 10000 + 200 \cdot d$ 2p

Stabileşte relația $D = 200 \cdot d$, unde D = dobânda, iar d = rata dobânzii simple, $2100 = 200 \cdot d$ 1p
Calculează rata dobânzii simple $d = 10,5$ 1p

3. Din 9 bărbaţi şi 6 femei se formează o delegaţie alcătuită din 5 persoane. În câte moduri diferite se poate forma această delegaţie, astfel încât ea să conţină:

a) 2 femei

b) 2 bărbaţi şi 3 femei

c) cel puţin 3 femei?

<u>Soluţie:</u>

a) Determină $C_6^2 \cdot C_9^3 = 1260$ de moduri în care poate fi formată delegaţia 2p

b) Determină $C_9^2 \cdot C_6^3 = 720$ de moduri în care poate fi formată delegaţia 2p

c) Stabileşte numărul minim de femei 3, maxim 5 .... 1p

Determină $C_9^2 \cdot C_6^3 + C_9^1 \cdot C_6^4 + C_6^5 \cdot C_9^0 = 861$ 2p

4. a) Demonstraţi că pentru orice numere reale pozitive a şi b are loc inegalitatea:

$$\frac{a+b}{2} \geq \left(\sqrt{10}\right)^{\lg a + \lg b}$$

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $x^2 + 6x + \sqrt{x^2 + 6x} = 20$

<u>Soluţie:</u>

a) $\lg a + \lg b = \lg(ab)$

$\left(\sqrt{10}\right)^{\lg(ab)} = 10^{\lg\sqrt{ab}}$ 1p

Deduce echivalenţa $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 1p

Demonstrează inegalitatea $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 1p

b) Condiţia de existenţă $x^2 + 6x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 6] \cup [0, \infty)$ 1p

Notează $\sqrt{x^2 + 6x} = a, a \geq 0$

Rezolvă ecuaţia $a^2 + a - 20 = 0 \Rightarrow a_1 = 4$ şi $a_2 = -5$ 1p

Stabileşte a = 4 şi rezolvă ecuaţia $\sqrt{x^2 + 6x} = 4$ 1p

Determină soluţiile $x_1 = -8$ şi $x_2 = 2$aparţinând domeniului de existenţă 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Într-o regiune a țării a fost măsurată înălțimea bărbaților pentru un eşantion de 200 de persoane, datele fiind cuprinse în tabelul următor:

Clasa	[160,170)	[170,175)	[175,180)	[180,185)	[185,190)	[190,195)	[195,205)
Frecvența	35	31	43	35	27	17	12

a) Reprezentați datele printr-o histogramă.
b) Calculați media şi dispersia datelor de mai sus.

Soluție:
a) Reprezentare grafică 2p
b) $m=\frac{1}{200}(35\cdot 165+31\cdot 172,5+...+12\cdot 200)=179,38\text{ cm}$ 3p
$\sigma^2=\frac{1}{200}\sum f_i(x_i-m)^2$ 2p

2. Considerăm un graf complet cu 90 de vârfuri.
a) Aflați numărul muchiilor grafului.
b) Care este numărul minim de muchii ce trebuie eliminate astfel încât graful să devină eulerian.

Soluție:
a) Numărul de muchii este $C_{90}^2=\frac{90\cdot 89}{2}=4005$ 2p
b) Un graf conex este eulerian dacă şi numai dacă d(v) este număr par, $\forall v\in V$ 2p
d(v) = 89, $\forall v\in V\Rightarrow$ trebuie eliminate minim $\frac{90}{2}$ = 45 muchii 3p

3. Vasile este bookmaker. La un meci de fotbal între echipele Ungariei şi României şansele pentru o victori a Ungariei au fost estimate statistic la 50%, iar pentru o victorie a României de 20%. Dacă Vasile doreşte un joc cinstit pentru clienții casei de pariuri, care ar trebui să fie cotele corecte pariurilor ?
(joc cinstit = joc în care media profitului este 0, cotă "a – b" = la b unități monetare pariate se câştigă a unități peste ce a pariat)

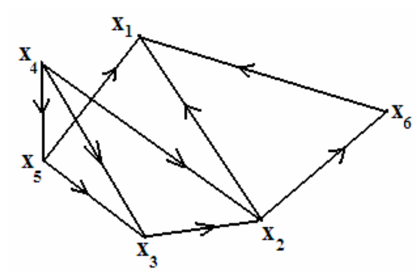
Soluție:
Cote sunt: "x – 1" – victorie Ungaria; "y – 1" – victorie România; "z – 1" – meci egal 1p

Victorie Ungaria:
Câştigă x cu probabilitate 0,5, pierd 1 (-1) cu probabilitate 0,5, m = 0,5x + 0,5· (-1) = 0 $\Rightarrow$ x = 1 $\Rightarrow$ cota (1 – 1) (pariez 1 leu şi primesc în caz de câştig 1 + 1 = 2 lei) 2p
Victorie România:
$\begin{pmatrix} y & -1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$, m = 0,2y + 0,8· (-1) = 0, y = 4, cota (4 – 1) 2p
Meci egal:
$\begin{pmatrix} z & -1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$, m = 0,3y + 0,7·(-1) = 0, $z = \frac{7}{3}$, cota $\left(\frac{7}{3} - 1\right)$ 2p

4. Se consideră graful orientat din figura alăturată. Să se afle dacă există drum hamiltonian şi în caz afirmativ să se indice acest drum.

Soluție:
Matricea conexiunii totale este:

D	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0	0	1
x_3	1	1	0	0	0	1
x_4	1	1	1	0	1	1
x_5	1	1	1	0	0	1
x_6	1	0	0	0	0	0



.... 2p

Pe diagonala principală avem doar zerouri şi deci graful nu are circuite.
Folosim teorema lui CHEN: Dacă un graf fără circuite are n vârfuri atunci el conține un drum hamiltonian dacă şi numai dacă matricea conexiunii totale asociată continue exact $\frac{n(n-1)}{2}$ elemente nenule 1p
În cazul nostru avem într-adevăr $C_6^2 = 15$ elemente neutre în matrice 1p
Vârfurile ce intră în drumul hamiltonian sunt date de ordinea descrescătoare a "puterilor" de atingere a acestora citite pe linii 1p
Din matrice, citim drumul hamiltonian: $\mu = (x_4, x_5, x_3, x_2, x_6, x_1)$ 2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi ecuaţia $X^3=A$, unde X este o matrice pătratică de ordinul 3, cu elemente numere reale.

a) Demonstraţi că AX = XA.

b) Demonstraţi că există numerele reale a, b, c astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$.

c) Demonstraţi că ecuaţia $X^3=A$ nu are soluţii.

<u>Soluţie:</u>

a) $X^4=X^3\cdot X=AX$ şi $X^4=X\cdot X^3=XA$, deci $AX=XA$ 2p

b) Dacă $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, din a) se obţine: $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$ 2p

c) Conform a), b) $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$, atunci $X^3=\begin{pmatrix}a^3&3a^2b&3a^2c+3ab^2\\0&a^3&3a^2b\\0&0&a^3\end{pmatrix}$ 1p

deci $a^3=0$, $3a^2b=1$, $3a^2c+3ab^2=0$ 1p

rezultă concluzia 1p

2. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, cu elemente numere întregi, simetrică ($a_{ij}=a_{ji}$, $\forall i,j=\overline{1,3}$). Demonstraţi că, dacă elementele de pe diagonala principală sunt egale, iar suma elementelor fiecărei linii este a, atunci $4a\cdot\det(A)$ este număr întreg pătrat perfect.

<u>Soluţie:</u>

Alege $A=\begin{pmatrix}x&y&z\\y&x&u\\z&u&x\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z})$ 2p

Din enunţ avem: $\begin{cases}x+y+z=a\\x+y+u=a\\x+z+u=a\end{cases}$ 1p

Deducem: $y=z=u$ 1p

$$A=\begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix} x+2y & y & y \\ x+2y & x & y \\ x+2y & y & x \end{vmatrix}=(x+2y)\begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 1 & x & y \\ 1 & y & x \end{vmatrix}=(x+2y)\begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 0 & x-y & 0 \\ 1 & 0 & x-y \end{vmatrix}=$$

$= (x + 2y)(x - y)^2$ 2p

Dar $x + 2y = a \Rightarrow 4a \cdot \det(A) = 4a^2(x - y)^2$ 1p

3. Fie legea de compoziție "$\circ$" definită prin: $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, unde x, y sunt numere întregi.

a) Demonstrați că legea "$\circ$" este asociativă.

b) Demonstrați că legea "$\circ$" este comutativă.

c) Demonstrați că legea "$\circ$" admite element neutru şi găsiți elementele inversabile.

d) Pe tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, …, 2013. Considerăm două numere dintre acestea. Le ştergem şi în locul lor punem rezultatul compunerii lor prin legea "$\circ$". Continuăm procedeul până rămâne un singur număr scris pe tablă. Care este acest număr?

<u>Soluție:</u>

a) Verifică asociativitatea …... 2p

b) Verifică comutativitatea 1p

c) Determină elementul neutru: 4 .... 1p

Găseşte elementele inversabile: 2 şi 4 .... 1p

d) Arată că numărul rămas pe tablă este 3 .... 2p

4. Un magazin alimentar vinde produsele A, B, C. La sfârşitul fiecărei zile se face bilanțul vânzărilor din acea zi. În prima zi se vând 18 bucăți din produsul A, 13 din produsul B şi 11 din produsul C. A doua zi se vând 8 bucăți din produsul A, 11 din produsul B, 6 din produsul C. A treia zi se vând 19 bucăți din produsul A, 7 din produsul B şi 2 din produsul C. Încasările din cele trei zile sunt: 705 u.m. în prima zi, 425 u.m. a doua zi şi 355 u.m. a treia zi.

a) Aflați valoarea fiecărui produs exprimată în unități monetare.

b) Dacă în prima zi s-au înregistrat 4 pierderi din produsul B, a doua zi 7 pierderi din produsul C, iar a treia zi câte 4 pierderi din produsele A şi B, care este procentul pierderilor din totalul vânzărilor în cele trei zile?

<u>Soluție:</u>

a) Notăm: 1 unitate (bucată) din produsul A costă x u.m.
1 unitate (bucată) din produsul B costă x u.m.
1 unitate (bucată) din produsul C costă x u.m. 1p

Obține sistemul:

$$\begin{cases} 18x+13y+11z=705 \\ 8x+11y+6z=425 \\ 19x+7y+2z=355 \end{cases}$$ 2p

Găseşte: $\begin{cases} x=10 \\ y=15 \\ z=30 \end{cases}$ 2p

b) <u>Pierderi:</u> 4x + 8y + 7z = 370 u.m. 1p

Procentul pierderilor este $\frac{37000}{1485}\% \simeq 24,9\%$ 1p