



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ  
20 mai 2017

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

## Problema 1.

Fie polinomul  $f = X^4 + 4X^3 + 9X^2 + aX + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  și  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$  rădăcinile lui.

- Arătați că  $f$  are cel mult două rădăcini reale.
- Determinați coeficienții  $a, b \in \mathbb{R}$  în cazul în care  $f$  are  $x_1 = x_2 = -1$ .
- Pentru  $a = 10$  și  $b = 4$ , notând cu  $\alpha$  și  $\beta$  rădăcinile complexe nereale ale polinomului  $f$ , să se calculeze  $S = (\alpha + 2)^{2017} + (\beta + 2)^{2017}$ .

## Soluție:

- Din relațiile Viète,  $S_1 = -4$  și  $S_2 = 9 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = S_1^2 - 2S_2 = -2$  ..... 1p  
și având  $f$  cu coeficienți reali și  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 0 \Rightarrow$  cel puțin două rădăcini sunt complexe nereale și astfel cel mult două sunt reale. .... 1p
- $f(-1) = f'(-1) = 0$  ..... 1p  
 $\Rightarrow a = 10, b = 4$  ..... 1p
- $f = X^4 + 4X^3 + 9X^2 + 10X + 4 = (x+1)^2(x^2 + 2x + 4)$  ..... 1p  
 $\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0, \beta^2 + 2\beta + 4 = 0$  și  $\alpha^3 = 8, \beta^3 = 8$  ..... 1p  
 $\Rightarrow S = (\alpha + 2)^{2017} + (\beta + 2)^{2017} = \left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)^{2017} + \left(-\frac{\beta^2}{2}\right)^{2017} = -\frac{1}{2^{2017}}(\alpha^{4034} + \beta^{4034}) = \dots = 2^{2017}$  ..... 1p



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ  
20 mai 2017

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

## Problema 2.

Irina, elevă în clasa a XII-a, găsește din întâmplare o ciornă în care colegul ei, Mircea, încerca să rezolve o problemă. Din ciornă ea constată că este vorba de o structură de corp comutativ  $(\mathbb{R}; *, \circ)$ , izomorf cu  $(\mathbb{R}; +, \cdot)$  printr-o funcție de gradul I și în care  $e = 4$  este elementul neutru al operației "\*" iar  $\bar{e} = 5$  este elementul neutru al operației " $\circ$ ". Folosind aceste informații și știind că Irina a rezolvat corect întreaga problemă, răspundeți la următoarele cerințe:

- Arătați că funcția care realizează izomorfismul este  $f: (\mathbb{R}; *, \circ) \rightarrow (\mathbb{R}; +, \cdot)$ ,  $f(x) = x - 4$ .
- Demonstrați că  $x * y = x + y - 4$  și  $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$ .
- Determinați opusul și inversul lui 2017 în structura  $(\mathbb{R}; *, \circ)$ .

## Soluție:

- Având în  $(\mathbb{R}; *, \circ)$   $e = 4$  și  $\bar{e} = 5$ , dacă  $f: (\mathbb{R}; *, \circ) \rightarrow (\mathbb{R}; +, \cdot)$  este izomorfism,  $f(4) = 0$  și  $f(5) = 1$  ..... 1p  
 $f(x) = ax + b$ ,  $f(4) = 0$  și  $f(5) = 1 \Rightarrow a = 1, b = -4$  ..... 1p
- $f(x * y) = f(x) + f(y) \Rightarrow x * y - 4 = (x - 4) + (y - 4) \Rightarrow x * y = x + y - 4$  ..... 2p  
 $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow x \circ y - 4 = (x - 4) \cdot (y - 4) \Rightarrow x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$  ..... 1p
- Dacă  $x'$  este simetricul lui  $x$  în  $(\mathbb{R}; *)$ ,  $x * x' = 4 \Rightarrow x' = 8 - x \Rightarrow 2017' = -2009$  ..... 1p  
respectiv  $x''$  este simetricul lui  $x$  în  $(\mathbb{R}; \circ)$ ,  $x * x'' = 5 \Rightarrow x'' = \frac{4x - 15}{x - 4} \Rightarrow 2017'' = \frac{8053}{2013}$  ..... 1p



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ  
20 mai 2017

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

### Problema 3.

Prețul de utilizare a unui aparat este suma dintre prețul de achiziție și costurile de întreținere. Considerăm că acest preț este dat de funcția  $C(x) = 10.000 + \frac{800}{3} \int_0^x \sqrt[3]{2t-1} dt$ , unde  $x \geq 0$  reprezintă numărul de ani trecuți de la momentul  $T = 0$

al achiziției până la momentul  $T = x$  iar  $C(x)$  este prețul de utilizare la  $x$  ani de la achiziție, exprimat în lei. Se cere:

- Determinați care este prețul de achiziție al aparatului?
- Determinați care a fost prețul de întreținere al aparatului la finalul primului an de utilizare.
- Arătați că prețul de întreținere al aparatului la finalul celui de al zecelea an de utilizare nu ajunge la 5030 lei.

### Soluție:

- a)  $C(0) = 10.000$  lei. .... 1p

$$\int_0^x \sqrt[3]{2t-1} dt = \frac{3}{8} (2t-1) \sqrt[3]{2t-1} \Big|_0^x = \frac{3}{8} [(2x-1) \sqrt[3]{2x-1} - 1] \text{ deci } C(x) = 9.900 + 100(2x-1) \sqrt[3]{2x-1}$$

- b)  $C(1) = 10.000$  ..... 2p

deci, pentru primul an de utilizare, prețul de întreținere este de 0 lei ..... 1p

- c)  $C(10) - C(0) = 100 \cdot (19 \sqrt[3]{19} - 1)$  ..... 2p

$$C(10) - C(0) < 100 \cdot (19 \cdot 2,7 - 1) = 5.030 \text{ lei} \dots\dots\dots 1p$$



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ  
20 mai 2017

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

## Problema 4.

Considerăm funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2}$  și  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Se cere:

a) Demonstrați că funcția  $F$  este derivabilă și  $F'(x) = f(x)$ .

b) Calculați  $\int_0^1 x f(x) dx$ .

c) Calculați  $\int_0^1 F(x) dx$ .

d) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$  și calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot F(x)}{f(x)}$ .

## Soluție:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2}$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow$  este primitivabilă și integrabilă pe fiecare interval  $[0; x] \subset \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \text{dacă } F_0 \in \int f(x) dx \text{ atunci } F(x) = \int_0^x f(t) dt = F_0(x) - F_0(0)$$

$\Rightarrow F$  este derivabilă și  $F'(x) = f(x)$ . ..... 1p

b)  $\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$  ..... 1p

c) Alegând  $u = F(x)$ ,  $v' = 1 \Rightarrow u' = f(x)$ ,  $v = x$  ..... 1p

$$\Rightarrow \int_0^1 F(x) dx = x \cdot F(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot f(x) dx \text{ ..... 1p}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 F(x) dx = F(1) - \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1-e}{2} \text{ ..... 1p}$$

d)  $t \geq 1 \Rightarrow e^{t^2} \geq e \Rightarrow F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \geq \int_0^x e dt = ex$ , deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$  ..... 1p

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x) + x \cdot f(x)}{2x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} + e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2}{4x^2 + 2} = \frac{1}{2} \text{ ..... 1p}$$