



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ  
20 mai 2017



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

## Problema 1.

Fie mulțimea de numere complexe  $M = \left\{ z \in \mathbb{C}^* / \left| z + \frac{1}{z} \right| \leq 2 \right\}$ .

- Arătați că  $1+2i \in M$  și  $2+i \notin M$ .
- Dacă  $z \in \mathbb{C}$  și  $|z|=1$ , arătați că  $z \in M$ .
- Dacă  $z \in \mathbb{C}$  și  $z^2 \in M$ , arătați că  $z \in M$ .

Soluție:

- $\left| 1+2i + \frac{1}{1+2i} \right| = \dots = 2 \leq 2$  .....2p
- $\left| 2+i + \frac{1}{2+i} \right| = \dots = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{5}} > 2$  .....1p
- Dacă  $|z|=1$ , atunci  $\left| z + \frac{1}{z} \right| \leq |z| + \frac{1}{|z|} \leq 2 \Rightarrow z \in M$  .....2p  
sau  $z = a+ib$  cu  $a^2+b^2=1 \Rightarrow \left| a+ib + \frac{1}{a+ib} \right| = |a+ib + a-ib| = 2|a| \leq 2 \Rightarrow z \in M$
- În cazul  $z^2 \in M$ , avem  $\left| z + \frac{1}{z} \right|^2 = \left| \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 \right| = \left| z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 \right| \leq \left| z^2 + \frac{1}{z^2} \right| + 2 \leq 4 \Rightarrow z \in M$  ..... 2p



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ  
20 mai 2017



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

## Problema 2.

Considerăm ecuația  $(\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ .

- Demonstrați că  $x = \frac{19\pi}{6}$  este soluție a acestei ecuații.
- Determinați mulțimea tuturor soluțiilor acestei ecuații.
- Dacă  $a \in \mathbb{R}$  este cea mai mică soluție pozitivă a acestei ecuații, calculați  $\sin\left(\frac{a}{2}\right)$ .

## Soluție:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \dots = \frac{\sqrt{3} \cos x + \sin x}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{și ecuația devine } 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$a) \quad x = \frac{19\pi}{6} = 3\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow 4 \cos^2(-3\pi) - 5 = \cos(-3\pi) \Leftrightarrow 4 - 5 = -1 \dots\dots\dots 2p$$

$$b) \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = t, \quad t \in [-1; 1], \quad 4t^2 - t - 5 = 0,$$

$$t_1 = \frac{5}{4} \notin [-1; 1], \dots\dots\dots 1p$$

$$t_2 = -1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} - x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1p$$

$$c) \quad a = \frac{7\pi}{6} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \dots = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \dots\dots\dots 1p$$



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ  
20 mai 2017

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

### Problema 3.

- Arătați că  $\{2 - \sqrt{5}\} = 3 - \sqrt{5}$ , unde  $\{a\}$  este partea fracționară a numărului real  $a$ .
- Calculați  $b^2 - b$ , pentru  $b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  și arătați că în acest caz  $b$  și  $b^2$  au aceeași parte fracționară.
- Dacă  $x$  este un număr irațional și  $q$  un număr rațional nenul, demonstrați că suma și produsul lor sunt numere iraționale.
- Dacă  $x$  este un număr real încât  $\{x\} = \{x^2\} = \{x^3\}$ , demonstrați că  $x$  este număr întreg.

### Soluție:

- $\{a\} = a - [a] = 2 - \sqrt{5} - (-1) = 3 - \sqrt{5}$  .....2p
- $b^2 - b = 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{b^2\} = \{b\}$  .....1p
- Dacă  $x + q = p \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = p - q \in \mathbb{Q}$  contradicție cu  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ..... 1p  
Dacă  $x \cdot q = r \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{r}{q} \in \mathbb{Q}$  contradicție cu  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ..... 1p
- Din  $\{x\} = \{x^2\} \Rightarrow x^2 - x = n \in \mathbb{Z}$  iar din  $\{x^2\} = \{x^3\} \Rightarrow x^3 - x^2 = x(x^2 - x) = x \cdot n \in \mathbb{Z}$  și atunci  
dacă  $n = 0$  atunci  $x = 0 \in \mathbb{Z}$  sau  $x = 1 \in \mathbb{Z}$   
dacă  $n \neq 0$  atunci  $x \in \mathbb{Q}$  .....1p  
dar  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  și  $x^2 - x - n = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4n+1}}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{4n+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{4n+1} = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ ,  
din care se obține  $x_{1,2} \in \mathbb{Z}$  .....1p  
sau prin reducere la absurd:  
Dacă  $x = \frac{a}{b}$ , cu  $a \in \mathbb{Z}^*$  și  $b \in \mathbb{N}^*$ ,  $b \geq 2$  este număr rațional exprimat ca fracție ireductibilă, atunci  $x^2 = \frac{a^2}{b^2}$   
și obținem  $x^2 - x = n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} = n \Leftrightarrow \frac{a^2 - ab}{b^2} = n \Leftrightarrow a^2 = b(nb + a) \Leftrightarrow b \mid a^2$  contradicție.



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ  
20 mai 2017

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

## Problema 4.

La un turneu de șah au participat  $n$  fete și  $2n$  băieți. Fiecare doi participanți au jucat între ei doar o singură partidă și nici o partidă nu s-a încheiat remiză. La încheierea concursului, raportul dintre numărul de victorii obținute de fete și numărul de victorii obținute de băieți a fost  $\frac{7}{5}$ . Dacă notăm cu  $x$  numărul total de victorii obținute de fete în partidele cu

băieți, se cere:

- Să se demonstreze că  $x \leq 2n^2$ .
- Să se demonstreze că  $8x = 17n^2 - 3n$ .
- Să se determine numărul de fete participante la acel turneu de șah.

## Soluție:

a) Numărul de meciuri jucate între un băiat și o fată este  $n \cdot 2n = 2n^2 \Rightarrow x \leq 2n^2$  ..... 2p

b) Fetele au jucat între ele  $\frac{n(n-1)}{2}$  partide iar băieții au jucat între ei  $n(2n-1)$  partide ..... 1p

Numărul de victorii ale fetelor este  $\frac{n(n-1)}{2} + x$  iar ale băieților este  $n(2n-1) + 2n^2 - x$  ..... 1p

Rezultă  $5 \cdot \left[ \frac{n(n-1)}{2} + x \right] = 7 \cdot [n(2n-1) + 2n^2 - x]$  ..... 1p

din care se obține  $8x = 17n^2 - 3n$  ..... 1p

c) Din  $x \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \leq 2n^2$  și  $8x = 17n^2 - 3n$  rezultă  $n(n-3) \leq 0$ , deci  $n \in \{1; 2; 3\}$ . Verifică  $n = 3$  ..... 1p