



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 1.

Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ și mulțimea G a matricelor $X(a)$ de forma $X(a) = I_2 + a \cdot A$, cu $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- Demonstrați că pentru orice $X(a), X(b) \in G$ are loc $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$ și $X(ab + a + b) \in G$.
- Arătați că orice matrice $X(a) \in G$ este inversabilă și $X^{-1}(a) = X\left(\frac{-a}{a+1}\right)$.
- Calculați $X^{-1}(5) \cdot X(41) \cdot X^{-1}(6)$.

Soluție:

- $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + a \cdot A)(I_2 + b \cdot A) = I_2 + b \cdot A + a \cdot A + ab \cdot A^2$ 1p
 $A^2 = A$ 1p
 $X(a) \cdot X(b) = I_2 + (a + b + ab) \cdot I_2 = X(a + b + ab)$ și
 $a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1 \neq -1 \Rightarrow X(ab + a + b) \in G$ 1p
- $I_2 = X(0)$ și $X(a) \cdot X(a') = X(0)$ 1p
 $\Rightarrow aa' + a + a' = 0 \Rightarrow a' = \frac{-a}{a+1} \neq -1 \Rightarrow X^{-1}(a) = X\left(\frac{-a}{a+1}\right)$ 1p
- Folosind $X(a) \cdot X(b) = X((a+1)(b+1)-1) \Rightarrow X(a) \cdot X(b) \cdot X(c) = X((a+1)(b+1)(c+1)-1)$ 1p
 $\Rightarrow X^{-1}(5) \cdot X(41) \cdot X^{-1}(6) = X\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot X(41) \cdot X\left(-\frac{6}{7}\right) = \dots = X(0) = I_2$ 1p



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 2.

Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă și $A^* = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ adjuncta matricei A .

- Determinați inversa matricei A^* .
- Demonstrați că $A \cdot A^* = A^* \cdot A = a \cdot I_3$, unde $a = \det A$ este determinantul matricei A .
- Determinați matricea A .

Soluție:

a) $(A^*)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3p

b) $A^{-1} = \frac{1}{a} \cdot A^* \Rightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^* = a \cdot I_3$ 2p

c) $A = a \cdot (A^*)^{-1} = \frac{a}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{-5a^2}{4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{5a^2}{4} = -5 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ sau } A = -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 3.

- a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Determinați $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha (\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b})$ este finită și nenulă.
- b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} - 3\sqrt{x})$.
- c) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ cu $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$. Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_1 \sqrt{x+1} + a_2 \sqrt{x+2} + \dots + a_n \sqrt{x+n})$.

Soluție:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha (\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-b) \cdot x^\alpha}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$ 2p
și limita este finită și nenulă când $\alpha = \frac{1}{2}$ 1p
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} - 3\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} ((\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) + (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) + (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}))$ 1p
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) + \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) + \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) = 3$ 2p
- c) Deoarece $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$, putem scrie
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_1 \sqrt{x+1} + a_2 \sqrt{x+2} + \dots + a_n \sqrt{x+n}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_1 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) + a_2 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) + \dots + a_n (\sqrt{x+n} - \sqrt{x}))$
și se obține $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_1 \sqrt{x+1} + a_2 \sqrt{x+2} + \dots + a_n \sqrt{x+n}) = 0$ 1p



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

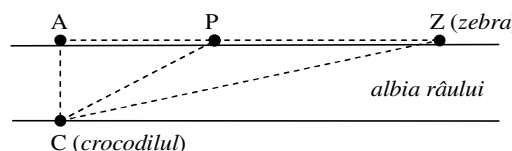
CLASA a XI-a

BAREM

Problema 4.

Un crocodil și o zebra se află de o parte și de cealaltă a unui râu iar în figură se arată cum crocodilul, aflat în poziția C , poate ajunge la zebra aflată în poziția Z pe un traseu $[CP] + [PZ]$, unde $P \in [AZ]$ iar triunghiul ACZ este dreptunghic

în A . Se știe că $AZ = 22,5 \text{ m}$ iar $T(x) = \frac{4x^2 + 180}{5x + 10}$ exprimă în minute timpul necesar crocodilului pentru a parcurge traseul $[CP] + [PZ]$, unde $x = AP$.



Se cere:

- Calculați în cât timp ajunge crocodilul la zebra doar înot, adică parcurgând segmentul $[CZ]$.
- Calculați în cât timp ajunge crocodilul la zebra dacă traversează râul pe drumul cel mai scurt, $[CA]$.
- Determinați timpul minim în care crocodilul poate ajunge la zebra.
- Arătați că, pentru orice durată $t \in (8; 18]$, crocodilul poate alege două trasee pentru a ajunge la zebra în t minute.

Soluție:

a) $T(22,5) = 18$ minute 1p

b) $T(0) = 18$ minute 1p

c) $T'(x) = \frac{4}{5} \cdot \frac{x^2 + 4x - 45}{(x+2)^2}$ 1p

și $x^2 + 4x - 45 = 0$ are $x_1 = 5 \geq 0$ și $x_2 = -9 < 0$ 1p

\Rightarrow funcția $T: [0; 22,5] \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{4x^2 + 180}{5x + 10}$ este

strict descrescătoare pe $[0; 5]$ și strict crescătoare pe $[5; 22,5]$ 1p

deci $T(5) = 8$ minute este timpul minim în care crocodilul poate ajunge la zebra. 1p

d) Funcția $T: [0; 22,5] \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{4x^2 + 180}{5x + 10}$, fiind continuă, descrescătoare pe $[0; 5]$ și strict crescătoare

pe $[5; 22,5]$, cu $T(5) = 8$ și $T(0) = T(22,5) = 18 \Rightarrow$

\Rightarrow pentru orice $t \in (8; 18]$ vor exista $x_1 \in [0; 5]$ și $x_2 \in (5; 22,5]$ cu $T(x_1) = T(x_2) = t$ 1p