



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 1.

Ioana și Maria, eleve în clasa a IX-a, studiază la școală 15 discipline și la sfârșitul primului semestru au obținut aceeași medie generală. Știind că fiecare din ele a avut medii de 8, 9 și 10 și numai de acestea iar numărul mediilor de 8 ale Ioanei este cu 6 mai mare decât numărul de medii de 8 ale Mariei, aflați care este media lor generală pe acel semestru.

Soluție:

Dacă a, b, c reprezintă numărul de medii respectiv de 8, 9 și 10 ale Ioanei, atunci $a, b, c \in \{1; 2; 3; \dots; 13\}$ și în mod analog, dacă x, y, z reprezintă numărul de medii de 8, 9 și 10 ale Mariei, atunci $x, y, z \in \{1; 2; 3; \dots; 13\}$ 1p
 și $a + b + c = 15$, respectiv $x + y + z = 15$ 1p
 $8a + 9b + 10c = 8x + 9y + 10z$ 1p
 $a = x + 6$ 1p
 $8a + 9b + 10(15 - a - b) = 8x + 9y + 10(15 - x - y) \Rightarrow 2(a - x) = y - b$ 1p
 $y = b + 12$ 1p
 $b = 1, y = 13, x = 1, z = 1, a = 7, c = 7$ și media generală este 9 1p



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 2.

- Fie $ABCD$ un paralelogram. Arătați că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ pentru fiecare punct O din planul său.
- Dacă $ABCD$ este un patrulater pentru care există un punct O în planul său, astfel încât $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, arătați că $ABCD$ este paralelogram.
- Considerăm un triunghi ABC și paralelogramele $AMNB$ și $BNPC$. Arătați că $CPMA$ este paralelogram.

Soluție:

- Fie O un punct oarecare din planul paralelogramului $ABCD$, atunci:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \text{ care are loc deoarece } ABCD \text{ este paralelogram. 3p}$$
sau orice altă rezolvare corect parcursă.
- Deoarece, conform pașilor parcurși la punctul anterior, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, dacă relația $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ are loc pentru un punct din planul unui patrulater $ABCD$, atunci $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, ceea ce înseamnă că $AB \parallel DC$ și $[AB] \equiv [DC]$, deci $ABCD$ este paralelogram. 2p
sau orice altă rezolvare corect parcursă.
- Conform cu a), vom avea:
în paralelogramul $AMNB$, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON}$ iar în paralelogramul $BNPC$, $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$ 1p
și sumând cele două obținem $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}$ din care, conform cu b), $CPMA$ este paralelogram..... 1p
sau orice altă rezolvare corect parcursă.



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 3.

Considerăm toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care pentru orice $x \in \mathbb{R}$ verifică $f(x) + 2f(1-x) = 3g(x)$.

- În cazul particular $f(x) = x^2 - x$, determinați funcția g .
- Arătați că, în condiția generală din enunț, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ se verifică $f(x) = 2g(1-x) - g(x)$.
- Demonstrați că atunci când g este funcție monoton crescătoare, f este funcție monoton descrescătoare.

Soluție:

- $f(x) = x^2 - x \Rightarrow 3g(x) = x^2 - x + 2(1-x)^2 - 2(1-x) \dots\dots\dots 1p$
 $\Rightarrow g(x) = x^2 - x \dots\dots\dots 1p$
- Din $f(x) + 2f(1-x) = 3g(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, rezultă $f(1-x) + 2f(x) = 3g(1-x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 2p$
 și din sistemul celor două relații deducem $f(x) = 2g(1-x) - g(x) \dots\dots\dots 1p$
- Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $x_1 > x_2$ și cum g este crescătoare $\Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2) \Rightarrow -g(x_1) \leq -g(x_2)$ (1)
 Totodată din $x_1 > x_2$ rezultă $1-x_1 < 1-x_2 \Rightarrow g(1-x_1) \leq g(1-x_2) \Rightarrow 2g(1-x_1) \leq 2g(1-x_2)$ (2)
 Din (1) și (2) deducem implicația $x_1 > x_2 \Rightarrow 2g(1-x_1) - g(x_1) \leq 2g(1-x_2) - g(x_2)$, dar conform cu b),
 $2g(1-x) - g(x) = f(x)$, deci $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, ceea ce arată că atunci când g este funcție monoton
 crescătoare, f este funcție monoton descrescătoare. $\dots\dots\dots 2p$



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 4.

Notăm cu A mulțimea progresiilor aritmetice $(a; b; c)$, cu $a, b, c \in \{1; 2; 3; \dots; 2017\}$ și $a < b < c$.

- Determinați câte progresii din mulțimea A au primul termen $a = 1007$.
- Aflați câte progresii din mulțimea A au rația egală cu 100.
- Determinați numărul elementelor mulțimii A .

Soluție:

- Progresiile sunt $1007; 1007 + r; 1007 + 2r$ și având $1007 + 2r \leq 2017 \Rightarrow r \leq 505$, deci $r \in \{1; 2; 3; \dots; 505\}$ și înseamnă că avem 505 progresii care au primul termen $a = 1007$ 3p
- Progresiile sunt $a; a + 100; a + 200$ cu $a \leq 1817$, \Rightarrow 1817 progresii 2p
- Progresiile cu primul termen egal cu k sunt $k; k + r; k + 2r$, cu $r \leq \frac{2017 - k}{2}$

Pentru cazul în care k este par, $k = 2n$ și avem $r \leq 1008 - n$, deci $n \in \{1; 2; \dots; 1007\}$

iar pentru k impar, $k = 2n + 1$ și avem $r \leq 1008 - n$, deci $n \in \{0; 1; 2; \dots; 1007\}$.

În total vom avea $1008 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 1007) = 1008 + 1007 \cdot 1008 = 1008^2$ progresii 2p

Observație:

În mod analog, ordonând după rație obținem 2015 progresii cu rația 1, 2013 cu rația 2, 2011 cu rația 3, etc. și în total vom avea $1 + 3 + 5 + \dots + 2015 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2 \cdot 1008 - 1) = 1008^2$ progresii.