



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ  
18 martie 2017

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

## Problema 1.

Pe un cerc cu raza de  $\frac{1}{2\pi}$  metri se deplasează doi melci, notați  $A$  și  $B$ , plecând în același moment, din același loc și în sensuri diferite. Se știe că în fiecare a  $n$ -a secundă de la începutul deplasării lor, melcul  $A$  parcurge  $\frac{1}{2^n}$  metri în timp ce melcul  $B$  parcurge doar  $\frac{1}{4^n}$  metri.

- Arătați că distanța parcursă de melcul  $A$  în primele  $n$  secunde este egală cu  $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$  metri.
- Determinați după câte secunde distanța parcursă de melcul  $B$  este egală cu  $\frac{3}{8}$  din distanța parcursă de melcul  $A$ .
- Aflați de câte ori se întâlnesc cei doi melci, considerând că după fiecare întâlnire ei își continuă deplasarea după aceleași reguli.

## Problema 2.

- Demonstrați că  $4 < 4\log_7 10 < 5$ .
- Calculați  $[\log_3 256]$ , unde  $[x]$  este partea întreagă a numărului real  $x$ .
- Comparați numerele  $a = \log_7 10$  și  $b = \log_3 4$ .

## Problema 3.

Considerăm  $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ , cu  $i^2 = -1$ .

- Arătați că  $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$  și  $\varepsilon^3 = 1$ .
- Demonstrați că pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$  are loc  $x^2 + xy + y^2 = |x - \varepsilon y|^2$ .
- Dacă  $x, y, z \in \mathbb{R}$  și  $a = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ , respectiv  $b = xy^2 + yz^2 + zx^2$ , calculați în funcție de  $a$  și  $b$  expresia  $E = (x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3)$ .

## Problema 4.

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 3^x, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ .

- Arătați că  $\log_3 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .
- Arătați că  $f(\log_3 2) \in \mathbb{Q}$ .
- Demonstrați că ecuația  $f(x) = 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , nu are soluție.
- Demonstrați că funcția  $f$  nu este nici injectivă și nici surjectivă.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.